MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Paulina Wojtynek**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie 6 z listy 2:

Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem monotonicznie zmierzającym do 0. Skorzystać z kryterium Dirichleta i zbadać zbieżność poniższych szeregów w zależności od wartości $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}.$$

Rozwiązanie:

(a)

- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ jest postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ dla $b_n = \sin nx$.
- Dla $x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}:$

  $b_n = \sin nx = 0 \quad \Longrightarrow \forall_N \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx = 0 \quad \Longrightarrow$ badany szereg jest zbieżny
- Dla $x \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}:$

  ⧫ Dla dowolnego N

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{1}$$

  Zatem $\forall_N \ |S_N(x)| \leq \dfrac{2}{\left|2 \sin \frac{x}{2}\right|}$.

  ⧫ Ponadto, z założenia, ciąg (a_n) monotonicznie dąży do 0.

  ⧫ Na podstawie kryterium Dirichleta wnioskujemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ jest zbieżny.

- Wyprowadzenie wzoru (1):

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin Nx =$$

$$= \frac{2 \sin x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \ldots + 2 \sin Nx \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(1\frac{1}{2}x\right) + \cos\left(1\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(2\frac{1}{2}x\right) + \ldots + \cos\left(\left(N - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

  przy czym wykorzystaliśmy wzór na różnicę cosinusów:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$\Longrightarrow 2 \sin nx \sin \frac{1}{2}x = \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots, N$$

(b)

- Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$ jest postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, gdzie:

  $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$

  $b_n = \sin nx$

- Dla $x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$:

  $b_n = \sin nx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall_N \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx = 0 \quad \Longrightarrow$ badany szereg jest zbieżny

- Dla $x \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$:

  ♦ $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} \sin nx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$, patrz (1).

  ♦ Ciąg (a_n) jest malejący, ponieważ:

$$\forall_n \ a_{n+1} - a_n = \frac{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) - (n+1)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{(n+1)n} = \frac{n\cdot\frac{1}{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n(n+1)} = \frac{-\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}}{n(n+1)} < 0$$

  ♦ Aby pokazać, że $a_n \longrightarrow 0$, wykorzystamy:

  Twierdzenie Stolza:

  Niech (x_n), (y_n), $n \in \mathbb{N}$ będą ciągami liczb rzeczywistych, przy czym ciąg (x_n) jest rosnący i rozbieżny do $+\infty$. Jeśli istnieje skończona lub nieskończona granica $g = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$, to granica $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}$ także istnieje i jest równa g.

  W rozważanym przypadku:

$$x_n = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \ (x_n) \text{ jest rosnący}$$

$$y_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

  Zatem z tw. Stolza także $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

  ♦ Na podstawie kryterium Dirichleta wnioskujemy, że szereg

  $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$ jest zbieżny.