MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Edyta Wójcik**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 8 z listy 2.

Zbadaj, który z podanych poniżej szeregów jest zbieżny bezwzględnie, a który warunkowo:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

- Jest to szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, gdzie $c_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \geq 0\ \forall_n$.
- Badamy najpierw zbieżność bezwzględną podanego szeregu:

  Wiemy, że: $\forall_{x\geq 1} \quad 0 < \ln(x+1) < x$.

  Zatem $\forall_{n\geq 1} \quad \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}\right| = c_n > \frac{1}{n} = b_n > 0$.

  Ponadto szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞.

  Na mocy kryterium porównawczego wnioskujemy stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest rozbieżny do ∞, a w konsekwencji szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ nie jest zbieżny bezwzględnie. Jednak wciąż może to być szereg zbieżny.

- Sprawdzamy zatem teraz zbieżność badanego szeregu. Jest to szereg naprzemienny, zatem możemy skorzystać z kryterium Leibniza.

  Mamy $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, a ponadto ciąg c_n jest nierosnący, gdyż $\ln(n+1)$ rośnie wraz z n i jest dodatni.

  Z kryterium Leibniza wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ jest zbieżny.

Podsumowanie: badany szereg jest zbieżny warunkowo.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{3^n}$

- Jest to szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, gdzie $c_n = \frac{n^4}{3^n} \geq 0\ \forall_n$.
- Badamy zbieżność bezwzględną podanego szeregu:

  Mamy $\forall_{n\geq 1} \quad \left|(-1)^{n+1}\frac{n^4}{3^n}\right| = c_n$ oraz

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{(n+1)}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{(n+1)^4\cdot 3^n}{3^{(n+1)}\cdot n^4} = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}\cdot(1+0)^4 = \frac{1}{3} < 1.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, a w konsekwencji szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n^4}{3^n}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Podsumowanie: badany szereg jest zbieżny bezwzględnie.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n^2+1}-n)$

- Jest to szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, gdzie

$$c_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)\cdot(\sqrt{n^2+1}+n)}{(\sqrt{n^2+1}+n)} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \geq 0 \quad \forall_n.$$

- Zbadamy najpierw, czy powyższy szereg jest zbieżny bezwzględnie.

  Mamy $\forall_{n\geq 1} \quad \left|(-1)^{n+1}\,(\sqrt{n^2+1}-n)\right| = c_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$. Stąd dla $b_n = \frac{1}{n} \geq 0$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2} > 0.$$

  Ponadto szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞.

  Na mocy kryterium ilorazowego wnioskujemy stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest rozbieżny do ∞, a w konsekwencji szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n^2+1}-n)$ nie jest zbieżny bezwzględnie. Jednak wciąż może to być szereg zbieżny.

- Sprawdzamy teraz zbieżność badanego szeregu. Jest to szereg naprzemienny, zatem możemy skorzystać z kryterium Leibniza.

  Widzimy, że ciąg c_n jest nierosnący (bo $\sqrt{n^2+1}+n$ rośnie wraz z n i jest dodatnie) oraz że $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.

  Z kryterium Leibniza wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n^2+1}-n)$ jest zbieżny.

Podsumowanie: badany szereg jest zbieżny warunkowo.