MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Karolina Stempień**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 1 z listy 3.

Wyznaczyć obszary zbieżności i funkcje graniczne podanych ciągów funkcyjnych

(a) $f_n(x) = \dfrac{1+nx}{1+nx^2}$; (b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$

Rozwiązanie:

(a)

- Ustalamy dziedzinę ciągu funkcyjnego: $D_{f_n} = \mathbb{R}$.
- Wyznaczamy granicę ciągu funkcyjnego:

  Dla $x \neq 0$ $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+nx}{1+nx^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}+x}{\frac{1}{n}+x^2} = \dfrac{1}{x}.$

  Dla $x = 0$ $\quad f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1} = 1.$
- Z powyższych obliczeń wynika, że obszar zbieżności to $\mathbb{R}$, a funkcja graniczna ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 1, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}.$$

(b)

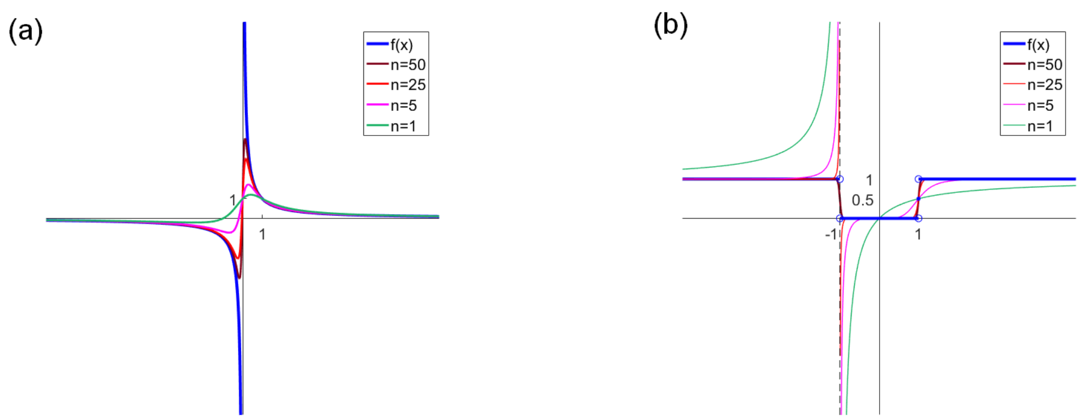
- Ustalamy dziedzinę ciągu funkcyjnego: $D_{f_n} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- Wyznaczamy granicę ciągu funkcyjnego:

  Dla $|x| > 1$ $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{x^n(\frac{1}{x^n}+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x^n}+1} = 1.$

  Dla $|x| < 1$ $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \dfrac{0}{1+0} = 0.$

  Dla $x = 1$ $\quad f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$
- Obszarem zbieżności jest zbiór $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, a funkcja graniczna przyjmuje postać:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } x = 1 \\ 1, & \text{gdy } |x| > 1 \end{cases}.$$



Rysunek 1: Wykresy $f_n(x)$ dla wybranych n oraz funkcji granicznej $f(x)$.