MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Karolina Stempień**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 2 z listy 3.

Sprawdzić zbieżność jednostajną podanych ciągów funkcyjnych na wskazanych zbiorach

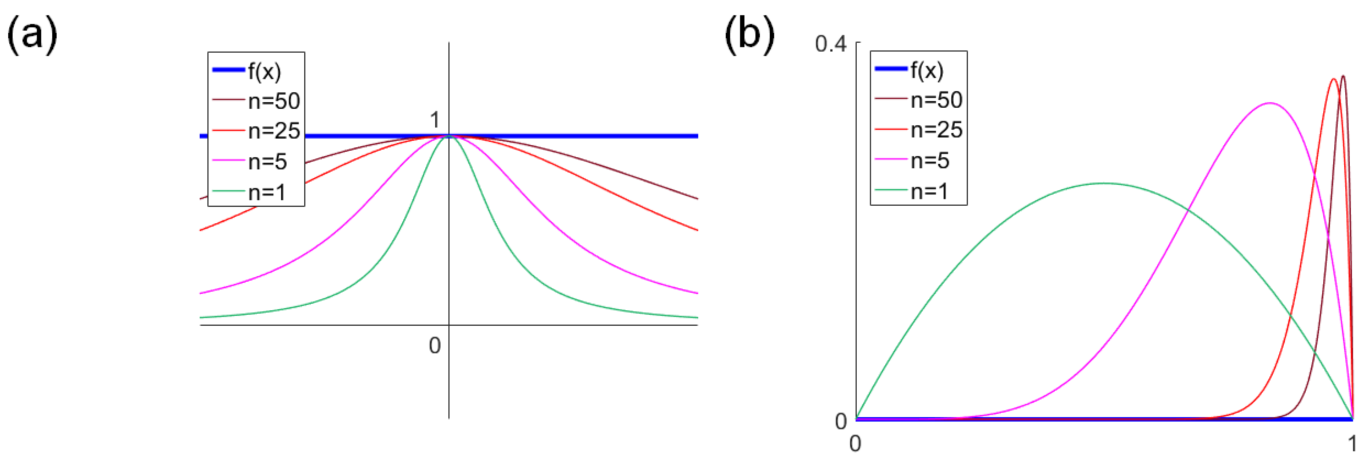
(a) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x^2}$, $\mathbb{R}$, $[-a,a]\,, a>0$; (b) $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $[0,1]\,,$ $[0,1)\,,$ $[0,a]\,, 0<a<1$.

Rozwiązanie:

Twierdzenie 1. *Niech* (f_n) *będzie ciągiem funkcyjnym zbieżnym (punktowo) do funkcji* f *na pewnym zbiorze* D*. Załóżmy, że* $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad M_n(D) = \sup\limits_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \infty$*. Wówczas:* $f_n \underset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} M_n(D) = 0$.

(a)

- Wyznaczamy funkcję graniczną:
  $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+x^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{n}} = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
- Zauważmy, że
  $$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n}{n+x^2} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+x^2} - \frac{n+x^2}{n+x^2}\right| = \frac{x^2}{n+x^2}.$$
- Dla $D = [-a,a]$ mamy
  $$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad 0 \le M_n([-a,a]) = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{x^2}{n+x^2} \le \frac{a^2}{n} < \infty.$$
  Ponadto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^2}{n} = 0$, więc z twierdzenia o trzech ciągach $M_n([-a,a]) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, co z Twierdzenia 1 implikuje, że $f_n \underset{[-a,a]}{\rightrightarrows} f$.
- Dla $D = \mathbb{R}$ mamy
  $$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(M_n(\mathbb{R}) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{n+x^2} \leqslant 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{n+x^2} = 1\right) \Longrightarrow M_n(\mathbb{R}) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{n+x^2} = 1.$$
  Ponieważ otrzymaliśmy, że $M_n(\mathbb{R}) = 1 \nrightarrow 0$, z Twierdzenia 1 wnioskujemy, że ciąg funkcyjny f_n nie jest zbieżny jednostajnie do f na $\mathbb{R}$.



Rysunek 1: Wykresy $f_n(x)$ dla wybranych n oraz funkcji granicznej $f(x)$.

(b) $f_n(x) = nx^n(1-x), \qquad [0,1]\,, \quad [0,1)\,, \quad [0,a]\,, \quad 0<a<1$

- Wyznaczamy funkcję graniczną $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx^n(1-x)$ dla $x\in[0,1]$.

  Dla $x=0$ i $x=1$ $\quad f_n(x)=0$ i stąd $f(x)=0$.

  $\forall_{x\in(0,1)}$ mamy $\dfrac{1}{x}>1$, więc $\lim\limits_{t\to\infty} tx^t = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{\left(\frac{1}{x}\right)^t} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^t\cdot \ln\frac{1}{x}} = 0,$

  a stąd $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx^n(1-x) = (1-x)\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad$ dla $x\in(0,1)$.

  Podsumowując: $f(x)=0 \quad \forall_{x\in[0,1]}$.

- Zauważmy, że

  $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{x\in[0,1]} \quad |f_n(x)-f(x)| = |nx^n(1-x)-0| = nx^n(1-x) = f_n(x)$.

  Zatem dla dowolnego $D\subseteq[0,1]$ mamy $M_n(D) = \sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in D} f_n(x)$, przy czym

  - ▶ $f_n(x)$ to funkcja ciągła i różniczkowalna na $[0,1]$,
  - ▶ $f_n'(x) = n^2x^{n-1}(1-x) - nx^n = nx^{n-1}(n-(n+1)x)$,
  - ▶ i wiemy, że na przedziale domkniętym (zawartym w $[0,1]$) funkcja ta może osiągać swoje kresy jedynie na końcach przedziału i w miejscach, w których pochodna się zeruje.

- Dla $D=[0,1]$ szukamy miejsc, w których pochodna się zeruje:

  $f_n'(x)=0, x\in[0,1] \Leftrightarrow x=0 \quad (\text{gdy } n\geq 2) \quad \vee \quad x=\dfrac{n}{n+1}.$

  Aby wyznaczyć $M_n([0,1])$, wystarczy teraz obliczyć wartości f_n na krańcach przedziału $[0,1]$ oraz w punkcie $x=\dfrac{n}{n+1}$, a następnie wybrać największą z nich.

  Mamy $f_n(0)=f_n(1)=0$,

  $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$

  Otrzymujemy, że $M_n([0,1]) = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{e}\neq 0.$

  Ponadto widać, że $M_n([0,1)) = M_n([0,1])$.

  Zatem z Twierdzenia 1 wnioskujemy, że ciąg f_n nie jest zbieżny jednostajnie ani na $[0,1]$, ani na $[0,1)$.

- Rozpatrzmy teraz zbiór $D=[0,a]\,, 0<a<1$.

  Punkt $x=\frac{n}{n+1}>a$ dla dostatecznie dużych n $\left(\text{bo } \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right)$,

  zatem dla dostatecznie dużych n $f_n'(x)=0, x\in[0,a] \Leftrightarrow x=0$,

  a w konsekwencji otrzymujemy $M_n([0,a]) = f_n(a) = na^n(1-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, bo $a\in(0,1)$,

  co z Twierdzenia 1 implikuje zbieżność jednostajną ciągu funkcyjnego f_n do f na zbiorze $[0,a]$.