MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: Paulina Wojtynek, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie 2 z listy 3:

Sprawdzić zbieżność jednostajną podanych ciągów funkcyjnych na wskazanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x^2}$, $\mathbb{R}$, $[-a,a]$, $a>0$, (b) $f_n(x) = nx^n(1-x)$, $[0,1]$, $[0,1)$, $[0,a]$, $0<a<1$.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1:

Niech $f_n, n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem funkcyjnym zbieżnym do funkcji f na pewnym zbiorze D. Załóżmy ponadto, że $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < +\infty$. Wówczas $f_n \underset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

(a)

- Dla $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x^2}, n \in \mathbb{N}$, wyznaczamy funkcję graniczną:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{n}} = 1.$$

- $\forall_n \quad \forall_{x\in\mathbb{R}} \quad |f_n(x) - f(x)| = \left| \dfrac{n}{n+x^2} - 1 \right| = \left| \dfrac{-x^2}{n+x^2} \right| = \dfrac{x^2}{n+x^2}.$

- Oznaczmy $g_n(x) = \dfrac{x^2}{n+x^2}$. Zauważmy, że $\sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in D} g_n(x)$ dla dowolnego zbioru $D \subset \mathbb{R}$. Ponadto $\forall_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < +\infty$, ponieważ $g_n(x) \leq 1 \ \forall_{x\in D}$.

(i) Weźmy $D = \mathbb{R}$.

$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ n \in D$, a stąd $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \ \geq \ g_n(n) = \dfrac{n^2}{n+n^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

W konsekwencji $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

$\implies f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie do f na $\mathbb{R}$ na mocy Tw. 1.

(ii) Teraz weźmy $D = [-a,a]$, $a>0$.

Funkcja g_n jest ciągła na D, przedziale domkniętym. Zatem osiąga na tym przedziale supremum, a ponadto wiadomo, że może je osiągnąć jedynie na końcach przedziału, w miejscach zerowania się pochodnej oraz w miejscach, gdzie pochodna nie istnieje.

$$\forall_{x\in[-a,a]} \quad g_n'(x) = \frac{2x(n+x^2) - 2x^3}{(n+x^2)^2} = \frac{2nx}{(n+x^2)^2} \ \text{ istnieje oraz } g_n'(x) = 0 \iff x = 0.$$

$g_n(0) = 0$, $g_n(a) = g_n(-a) = \dfrac{a^2}{n+a^2}$.

Wynika stąd, że $\forall_n \sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[-a,a]} g_n(x) = \dfrac{a^2}{n+a^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\implies f_n \underset{[-a,a]}{\rightrightarrows} f$ na mocy Tw. 1.

(b)

- Dla $f_n(x) = nx^n(1-x), n \in \mathbb{N}$, wyznaczamy funkcję graniczną $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall_{x\in[0,1]}$.

  Dla $x = 0$ i $x = 1$ mamy $f_n(x) = 0\ \forall_n$, a stąd $f(x) = 0$.

  Dla $x \in (0,1)$ policzmy granicę: $\lim\limits_{t\to\infty} tx^t = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{\left(\frac{1}{x}\right)^t} \overset{H}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^t \ln\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x^t}{(-\ln x)} = 0$

  Zatem $\forall_{x\in(0,1)} \quad f(x) = (1-x)\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$.
  Podsumowując: $f(x) = 0\ \forall_{x\in[0,1]}$

- $\forall_n \quad \forall_{x\in[0,1]} \quad |f_n(x) - f(x)| = nx^n(1-x) = f_n(x)$.

(i) Weźmy $D = [0,1]$.

Funkcja f_n jest ciągła na D, przedziale domkniętym. Zatem osiąga na tym przedziale supremum, a ponadto wiadomo, że może je osiągnąć jedynie na końcach przedziału, w miejscach zerowania się pochodnej oraz w miejscach, gdzie pochodna nie istnieje.

$\forall_{x\in[0,1]}\ f_n'(x) = n^2x^{n-1}(1-x) - nx^n = nx^{n-1}(n - xn - x) = nx^{n-1}(n - x(n+1))$ istnieje.

Dla $n = 1$: $\quad f_n'(x) = 0 \quad \iff \quad x = \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{n+1}$.
Dla $n > 1$: $\quad f_n'(x) = 0 \quad \iff x = 0 \ \vee\ x = \frac{n}{n+1} \in (0,1)$.
$\forall_n\ f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 0$,

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0.$$

Zatem $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Wynika stąd, że $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e} \neq 0$

$\Longrightarrow \quad f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie do f na $[0,1]$ na mocy Tw. 1.

(ii) Weźmy $D = [0,1]$.

Funkcja f_n osiąga supremum na $D = [0,1)$ w tym samym punkcie $x = \frac{n}{n+1}$,
więc ciąg f_n nie jest zbieżny jednostajnie na $[0,1)$.

(iii) Teraz weźmy $D = [0,a], 0 < a < 1$.

Ponieważ $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, punkt $x = \dfrac{n}{n+1} \notin [0,a]$ dla n dostatecznie dużych. Stąd dla n dostatecznie dużych $f_n'(x) = 0,\ x \in D \iff x = 0,\ f_n(0) = 0,\ f_n(a) = na^n(1-a)$,
a w konsekwencji $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,a]} f_n(x) = na^n(1-a)$.
Ponieważ $0 < a < 1$, $\quad na^n(1-a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\;$ a stąd $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Longrightarrow \quad f_n \underset{[0,a]}{\rightrightarrows} f$ na mocy Tw. 1.