MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Zuzanna Jędrzejewska**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 5 z listy 3.

Wyznacz obszary zbieżności szeregów funkcyjnych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{n\left(x^2-1\right)}$

Rozwiązanie:

(a) Przedstawiony w przykładzie szereg funkcyjny to szereg harmoniczny rzędu x. Jest on zbieżny, gdy jego rząd jest większy niż 1. Dokładniej:

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ jest } \begin{cases} \text{zbieżny, gdy } x > 1; \\ \text{rozbieżny, gdy } x \leqslant 1. \end{cases}$$

<u>*Wniosek:*</u> Obszar zbieżności badanego szeregu funkcyjnego to $(1; +\infty)$

(b) W celu wyznaczenia obszaru zbieżności badanego szeregu funkcyjnego zauważmy, że szereg ten przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \text{ dla } y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Łatwo pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 \leqslant y < 1$. Mianowicie,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{y^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|y|}{\sqrt[n]{n}} = |y|,$$

więc na mocy kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny, gdy $|y| < 1$, a rozbieżny, gdy $|y| > 1$. Ponadto, dla $y = 1$ otrzymujemy szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, który jest rozbieżny, a dla $y = -1$ uzyskujemy szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, który jest zbieżny.

Wracając do pierwotnej zmiennej otrzymujemy zatem, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$ jest zbieżny $\iff$

$$\begin{aligned}
-1 \leqslant & \frac{x+1}{x-1} < 1 \\
-1 \leqslant & 1 + \frac{2}{x-1} < 1 \\
-2 \leqslant & \frac{2}{x-1} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
-1 \leqslant \dfrac{1}{x-1} & \wedge & \dfrac{2}{x-1} < 0 \\
0 \leqslant \dfrac{x}{x-1} & \wedge & x-1 < 0 \\
0 \leqslant x\,(x-1) & \wedge & x < 1 \\
x \in (-\infty;0) \cup (1;\infty) & \wedge & x \in (-\infty;1)
\end{array}$$

$$x \in (-\infty;0]$$

Wniosek: Obszar zbieżności badanego szeregu funkcyjnego to $(-\infty;0]$.

(c) W celu wyznaczenia obszaru zbieżności badanego szeregu funkcyjnego, zauważmy, że szereg ten ma postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^n \text{ dla } y = e^{x^2-1}.$$

Łatwo pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ny^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 < y < 1$. Mianowicie,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|ny^n|} = \lim_{n\to\infty} |y| \sqrt[n]{n} = |y|\,,$$

więc na mocy kryterium Cauchy'ego badany szereg jest zbieżny, gdy $|y| < 1$, a rozbieżny, gdy $|y| > 1$. Natomiast dla $y = 1$ otrzymujemy $\sum_{n=1}^{\infty} n$, a dla $y = -1$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n$, gdzie oba te szeregi są rozbieżne.

Wracając do pierwotnej zmiennej otrzymujemy stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{n\left(x^2-1\right)}$ jest zbieżny $\iff$

$$\begin{aligned}
-1 < & e^{x^2-1} < 1 \\
& e^{x^2-1} < e^0 \\
& x^2 - 1 < 0 \quad \text{(bo funkcja wykładnicza jest różnowartościowa i rosnąca)} \\
& x \in (-1;1)
\end{aligned}$$

Wniosek: Obszar zbieżności badanego szeregu funkcyjnego to $(-1;1)$.