MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Weronika Niewiora**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 6 z listy 3.

Sprawdzić zbieżność jednostajną szeregów funkcyjnych na podanych zbiorach

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$, $\mathbb{R}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$, $\mathbb{R}, [-1,1], [-a,a], [b,\infty)$, gdy $0<a<1, b>1$.

Rozwiązanie:

Wykorzystamy:

Kryterium Weierstrassa.

Jeśli istnieje szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ *zbieżny i taki, że* $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge\limits_{x\in D} |f_n(x)| \leqslant g_n$,
to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *jest zbieżny jednostajnie na zbiorze* $\mathbb{D}$.

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$, $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Aby skorzystać z kryterium Weierstrassa, szukamy takiego ciągu liczbowego (g_n), dla którego g_n z góry ogranicza $|f_n(x)|$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ jest zbieżny.

Zauważmy, że licznik $\sin nx$ wyrazów badanego ciągu funkcyjnego może przyjmować tylko wartości z przedziału $[-1,1]$, a mianownik x^2+n^2 jest zawsze większy lub równy n^2 (bo $x^2 \geqslant 0$). Zatem

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} = g_n.$$

Ponadto szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ jest zbieżny (bo $p = 2 > 1$).

Na podstawie kryterium Weierstrassa wnioskujemy stąd, że

szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

- $\mathbb{D} = [-1,1]$ i $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

  Zauważmy, że dla $x=1$ badany szereg ma postać $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ i jest rozbieżny. Zatem $\mathbb{D} = [-1,1]$ i $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ nie zawierają się w obszarze zbieżności badanego szeregu funkcyjnego, a stąd w oczywisty sposób szereg ten nie może być zbieżny jednostajnie na tych zbiorach.

- $\mathbb{D} = [-a,a], \quad 0 < a < 1$

  Szukamy takiego ciągu liczbowego (g_n), dla którego g_n z góry ogranicza $|f_n(x)|$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ jest zbieżny.

  Z postaci $f_n(x)$ widać, że mianownik $1+x^{2n}$ zawsze jest większy lub równy 1. Natomiast dla $x \in [-a,a]$ licznik x^n zawiera się w przedziale $[-a^n, a^n]$. Zatem

  $$\bigwedge_{x\in[-a,a]} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant a^n = g_n$$

  Ponadto szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ jest zbieżny, bo $0 < a < 1$.

  Na podstawie kryterium Weierstrassa wnioskujemy stąd, że

  szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{D} = [-a,a]$.

- $\mathbb{D} = [b,\infty), \ b > 1$

  Zauważmy, że $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}} \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n + 1} = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n + 1}$

  Po przekształceniu mianownik funkcji $f_n(x)$, czyli $\left(\frac{1}{x^2}\right)^n + 1$, jest większy od 1, bo $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^n > 0$ dla $x \geqslant b > 1$. Natomiast licznik $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ jest największy dla najmniejszego $x = b$. Zatem

  $$\bigwedge_{x\geqslant b} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \left| \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^n + 1} \right| \leqslant \left| \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^n}{1} \right| = \left(\frac{1}{b}\right)^n = g_n$$

  Ponadto szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{b}\right)^n$ jest zbieżny, bo $0 < \dfrac{1}{b} < 1$.

  Na podstawie kryterium Weierstrassa wnioskujemy stąd, że

  szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{D} = [b,\infty)$.