MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Barbara Poprawa**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 8 z listy 3.

Wyznaczyć promień i obszar zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n^2+n}; \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+1} x^n; \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n5^{n-1}}; \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{(2n)!} x^n.$$

Rozwiązanie:

Wykorzystamy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1.
Rozważamy szereg potęgowy postaci $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$. *Niech* $R = \frac{1}{\lambda}$ *dla* $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, *przy czym przyjmujemy* $R = +\infty$, *gdy* $\lambda = 0$, *oraz* $R = 0$, *gdy* $\lambda = +\infty$. *Wówczas:*

- *jeżeli* $0 < R < \infty$, *to badany szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie na przedziale* $(x_0 - R, x_0 + R)$, *a jest rozbieżny na* $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$, *natomiast w punktach* $x = x_0 \pm R$ *może być zbieżny lub rozbieżny;*
- *jeżeli* $R = \infty$, *to badany szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie na* $\mathbb{R}$*;*
- *jeżeli* $R = 0$, *to badany szereg potęgowy jest zbieżny tylko w punkcie* x_0 *(rozbieżny na* $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$*).*

R nazywamy promieniem zbieżności rozważanego szeregu potęgowego.

Twierdzenie 2.
Promień zbieżności szeregu potęgowego z Twierdzenia 1. wynosi $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$ *oraz* $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$, *o ile odpowiednia granica istnieje (właściwa lub niewłaściwa).*

Ad (a)

- Mamy tu $x_0 = 0$, $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$
- Obliczamy promień zbieżności wykorzystując Twierdzenie 2. Mamy:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + n + 1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

- Z Twierdzenia 1. rozważany szereg jest zbieżny na $(x_0 - R, x_0 + R) = (-1, 1)$ i rozbieżny na $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, -\infty,) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- Zbadamy teraz zbieżność szeregu w punktach $x = -1$ i $x = 1$.
- Dla $x = -1$ rozważany szereg przyjmuje postać:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

  Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

  $$0 \leqslant \frac{1}{n^2 + n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

  oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Z kryterium porównawczego wynika zatem, że badany szereg także jest zbieżny.
- Dla $x = 1$ rozważany szereg potęgowy przyjmuje postać:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ \frac{1}{n^2 + n}.$$

  Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \ \frac{1}{n^2 + n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ jest (jak pokazaliśmy wcześniej) zbieżny, badany szereg jest zbieżny bezwzględnie, czyli zbieżny.
- Z powyższych rozważań wynika, że obszarem zbieżności badanego szeregu potęgowego jest przedział $[-1, 1]$.

Ad (b)

- W tym przykładzie $x_0 = 0, \ c_n = \frac{n!}{n+1}$
- Z Twierdzenia 2. promień zbieżności R jest równy:

  $$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n+1} \cdot \frac{n+2}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 0.$$

- Z Twierdzenia 1. badany szereg jest zbieżny tylko w punkcie 0. Inaczej mówiąc, obszarem zbieżności badanego szeregu potęgowego jest zbiór jednoelementowy $\{0\}$.

Ad (c)

- Mamy tu $x_0 = 2,\ c_n = \dfrac{1}{n5^{n-1}}$.
- Obliczamy promień zbieżności wykorzystując Twierdzenie 2. Otrzymujemy:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{5}} = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5.$$

- Z Twierdzenia 2. rozważany szereg jest zbieżny na $(x_0 - R, x_0 + R) = (2-5, 2+5) = (-3, 7)$ i rozbieżny na $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, -\infty,) = (-\infty, -3) \cup (7, \infty)$.
- Zbadamy teraz zbieżność szeregu w punktach $x = -3$ i $x = 7$.
- Podstawiając w badanym szeregu potęgowym $x = -3$ otrzymamy szereg liczbowy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{5}{n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

  Jest to szereg anharmoniczny, zbieżny z kryterium Leibniza.
- Przyjmując $x = 7$ otrzymamy szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

  który jest rozbieżny.
- Z powyższych rozważań wynika, że obszarem zbieżności badanego szeregu potęgowego jest przedział $[-3, 7)$.

Ad (d)

- Tutaj $x_0 = 0,\ c_n = \dfrac{n+10}{(2n)!}$.
- Z Twierdzenia 2. promień zbieżności równy jest:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+10}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{n+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{10}{n}\right)(2n+1)(2n+2)}{1 + \frac{11}{n}} = \infty.$$

- Z Twierdzenia 1. obszarem zbieżności badanego szeregu jest $\mathbb{R}$.