MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Gabriela Sochanowska**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 9 z listy 3.

Wyznaczyć szereg Maclaurina funkcji f i określić jego obszar (przedział) zbieżności.

(a) $f(x) = \sinh x$

(b) $f(x) = 2^x$

(c) $f(x) = \cos 2x$

(d) $f(x) = \cos^2 x$

(e) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

Rozwiązanie:

(a) Sinus hiperboliczny zdefiniowany jest następująco:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Wiemy, że rozwinięcie funkcji e^x w szereg Maclaurina ma postać

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Stąd

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \quad -x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

i otrzymujemy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n!}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

$$\left(\text{ponieważ } \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 0 \text{ dla parzystych } n; \\ 1 \text{ dla nieparzystych } n \end{cases}\right).$$

(b) Dla funkcji $f(x) = 2^x$, jak w powyższym podpunkcie, skorzystamy ze wzoru (1). Mamy

$$2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Rozwinięcie w szereg Maclaurina funkcji $\cos x$ ma postać

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zatem dla badanej funkcji otrzymujemy:

$$\cos 2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(d) Wiemy, że $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, a zatem $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$. Korzystając ze wzoru (2), wyprowadzonego w podpunkcie (c), dla badanej funkcji otrzymujemy zatem

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n \cdot x^{2n}}{2(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(e) Zauważmy, ze $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
Szereg Maclaurina funkcji $\ln(1+x)$ ma postać

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1.$$

Stąd

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n}, \quad -1 < -x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 1.$$

Zatem dla badanej funkcji otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-x)^n}{n} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} - (-1)^{n+1} \cdot \frac{(-x)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} - (-1)^{2n+1} \cdot \frac{x^n}{n} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n+1} + 1) \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1}, \quad -1 < x < 1.
\end{aligned}$$