MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: dr hab. inż. **Agnieszka Jurlewicz**, prof. PWr,
Mateusz Sroka, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 10* z listy 4.

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, \infty)$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że $|f'(x)| \leqslant C$ dla każdego $x \in [a, \infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Rozwiązanie:

Założenia:

- ▹ f jest funkcją ciągłą i ma ciągłą pochodną na $[a, \infty)$
- ▹ $\exists\, C > 0 \;\; \forall\, x \geqslant a \quad |f'(x)| \leqslant C$
- ▹ całka $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ jest zbieżna.

Teza: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0.$

Dowód (nie wprost):

- Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, co jest równoważne temu, że

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall\, M \geqslant a \;\; \exists\, x_M > M \;:\; |f(x_M)| \geqslant \varepsilon_0.$$

- Indukcyjnie możemy pokazać, że wynika z tego istnienie takiej stałej $\varepsilon_0 > 0$, dla której dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje ciąg (x_n), taki że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$x_{n+1} > x_n + \delta \geqslant a \quad \text{i} \quad |f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

(Dla $M = a$ istnieje takie x_1, a potem indukcyjnie znajdziemy kolejne x_{n+1} odpowiadające $M = x_n + \delta$.)

- Ponieważ f' jest ciągła na $[a, \infty)$, mamy

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \ \ \forall \ x \geqslant x_n \quad f(x) - f(x_n) = \int\limits_{x_n}^{x} f'(t)dt.$$

Jednocześnie, z założenia $\exists\, C > 0 \ \ \forall\, x \geqslant a \quad |f'(x)| \leqslant C$. Zatem

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \ \ \forall \ x \geqslant x_n \quad ||f(x)| - |f(x_n)|| \leqslant |f(x) - f(x_n)| \leqslant \int\limits_{x_n}^{x} |f'(t)|dt \leqslant C(x - x_n).$$

Wynika stąd, że

$$\forall \ n \in \mathbb{N} \ \ \forall \ x \in [x_n, x_n + \delta] \quad |f(x)| \geqslant |f(x_n)| - C(x - x_n) \geqslant \varepsilon_0 - C\delta.$$

Ponadto przedziały $[x_n, x_n + \delta], n \in \mathbb{N}$, są rozłączne.

- Dla $\delta = \frac{\varepsilon_0}{2C}$ otrzymujemy zatem, że istnieje stała $C_0 = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ taka, że dla

$$g(x) = \begin{cases} C_0 & \text{dla } \ x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [x_n, x_n + \delta]; \\ 0 & \text{dla pozostałych } \ x \geqslant a, \end{cases}$$

mamy

$$\forall\, x \geqslant a \quad |f(x)| \geq g(x) \geqslant 0.$$

Ponieważ całka $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_n}^{x_n+\delta} C_0 dx = \sum\limits_{n \geq a} C_0\delta = \infty$, czyli jest rozbieżna do ∞, więc z kryterium porównawczego także całka $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx$ jest rozbieżna, co jest sprzeczne z założeniem.

- Zatem zachodzi teza: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.$\blacksquare$