MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Ewa Pitner**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 6 z listy 4.

Sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

$$\textbf{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{1-x^{30}}; \quad \textbf{(b)} \int_1^\infty xe^{-x}\ln x\, dx; \quad \textbf{(c)} \int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x}\sin x\, dx.$$

Rozwiązanie

(a)

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^{30}}$ to całka niewłaściwa drugiego rodzaju, dla której punktem osobliwym jest punkt $x=1$, ponieważ punkt ten nie znajduje się w dziedzinie funkcji podcałkowej.
- Aby sprawdzić zbieżność tej całki, skorzystamy z kryterium ilorazowego. Przypomnijmy teraz to kryterium w formie, z której będziemy korzystać.

  Kryterium ilorazowe

  Założenia:

  ◇ $\forall_{a\le x<b}\ f(x)\ge 0 \wedge g(x)>0;$

  ◇ *istnieje skończona granica* $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0.$

  Teza: całka $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ *jest zbieżna* $\Leftrightarrow$ *całka* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *jest zbieżna.*

- Funkcja podcałkowa jest postaci $f(x)=\dfrac{1}{1-x^{30}}$, $a=0$, $b=1$. Szukamy funkcji $g(x)$, dla której spełnione są założenia kryterium i dla której łatwo sprawdzimy, czy całka $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ jest zbieżna.
- Rozważmy $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Mamy

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{1-x^{30}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{-30x^{29}}=\frac{1}{30},\quad 0<\frac{1}{30}<+\infty.$$

  Ponadto

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x}=-\lim_{T\to 1^-}\int_0^T\frac{-dx}{1-x}=-\lim_{T\to 1^-}\left[\ln|1-x|\right]_0^T=-(-\infty-0)=+\infty,$$

  tzn. całka $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ jest rozbieżna do $+\infty$. Zatem na podstawie kryterium ilorazowego wnioskujemy, że całka $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x^{30}}$ również jest rozbieżna do $+\infty$.

(b)

- W tym przykładzie do sprawdzenia zbieżności całki użyjemy kryterium porównawczego.

  Kryterium porównawcze

  Załóżmy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ spełniają nierówność

$$\forall_{x\geq a} \quad 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

  Wówczas:

  ◇ *jeśli całka* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *jest zbieżna, to całka* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *też jest zbieżna;*

  ◇ *jeśli całka* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *jest rozbieżna, to całka* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *też jest rozbieżna.*

- Wiemy, że

$$\forall_{x\geq 1} \quad 0 \leq \ln x < x \quad \Rightarrow \quad \forall_{x\geq 1} \quad 0 \leq xe^{-x}\ln x < x^2e^{-x}.$$

  Zatem wystarczy, że pokażemy, że całka $\int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ jest zbieżna, a z tego wywnioskujemy zbieżność całki $\int_1^{+\infty} xe^{-x}\ln x\, dx$ na podstawie kryterium porównawczego.

- Dla ułatwienia najpierw obliczymy całkę nieoznaczoną $\int x^2e^{-x}dx$. Wykorzystamy metodę całkowania przez części.

$$\int x^2e^{-x}dx = \begin{bmatrix} f = x^2 & f' = 2x \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} f = x & f' = 1 \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+2x+2) + c$$

- Przejdziemy teraz do obliczenia całki niewłaściwej $\int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx$.

$$\int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \lim_{T\to+\infty}\int_1^T x^2e^{-x}dx = \lim_{T\to+\infty}\left[-e^{-T}(T^2+2T+2) + 5e^{-1}\right] =$$
$$= -\lim_{T\to+\infty}\frac{T^2+2T+2}{e^T} + \frac{5}{e} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{T\to+\infty}\frac{2T+2}{e^T} + \frac{5}{e} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{T\to+\infty}\frac{2}{e^T} + \frac{5}{e} = \frac{5}{e}.$$

  Zatem całka $\int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx$ jest zbieżna.

- Stąd na podstawie kryterium porównawczego wnioskujemy, że badana całka jest zbieżna.

(c)

- W ostatnim przykładzie skorzystamy z kryterium Dirichleta.

  Kryterium Dirichleta

  Załóżmy, że $f \in C([a,+\infty)), \quad g \in C^1([a,+\infty))$ *oraz:*

  ◇ *funkcja* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *jest ograniczona na* $[a,+\infty)$*;*

  ◇ $g(x)$ *jest nierosnąca na* $[a,+\infty)$ *i* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

  Wówczas całka $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *jest zbieżna.*

- W rozważanym przypadku przyjmijmy $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$. Mamy

  ▷ f jest ciągła na $[1,\infty)$;

  ▷ $g'(x) = (\frac{\ln^2 x}{x})' = \frac{\frac{2\ln x}{x}x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$ istnieje i jest ciągła na $[1,\infty)$;

  ▷ dla $x \in [1,\infty)$ funkcja $F(x) = \int_1^x \sin t dt = [-\cos t]_1^x = -\cos x + \cos 1 \in <-2,2>$

  $\Rightarrow$ funkcja $F(x)$ jest ograniczona na $[1,\infty)$;

  ▷ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$;

  ▷ $g'(x) < 0 \quad \forall_{x\in[e^2,+\infty)}$

  $\Rightarrow$ funkcja $g(x)$ jest malejąca na półprostej $[e^2,+\infty)$.

- Ze względu na ostatnią własność funkcji g przedstawmy badaną całkę jako sumę

$$\int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x} \sin x\, dx = \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} \sin x\, dx + \int_{e^2}^\infty \frac{\ln^2 x}{x} \sin x\, dx.$$

  Pierwszy składnik tej sumy to dobrze określona całka oznaczona z funkcji ciągłej, natomiast drugi składnik to całka niewłaściwa zbieżna na mocy kryterium Dirichleta. Stąd badana całka jest zbieżna.