MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Mateusz Sroka**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 8 z listy 4.

(a) Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[1,\infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int\limits_1^\infty f(x^2)\,dx$ też jest zbieżna.
Wskazówka: Podstawić $x=\sqrt{y}$ i skorzystać z kryterium Dirichleta.

(b) Czy prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia z podpunktu (a) dla całki niewłaściwej drugiego rodzaju, np. $\int\limits_0^a f(x)\,dx,\ a>0$?

Rozwiązanie:

(a) ***Założenia:*** f jest funkcją ciągłą i nieujemną na $[1,\infty)$ oraz całka $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Teza: całka $\int\limits_1^\infty f(x^2)\,dx$ jest zbieżna.

Dowód:

- Podstawiając $x=\sqrt{y}$ otrzymujemy $\int\limits_1^\infty f(x^2)\,dx = \left[\begin{array}{c} x=\sqrt{y} \\ dx=\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \infty \\ \hline y & 1 & \infty \end{array} \end{array}\right] = \int\limits_1^\infty f(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy.$
- f jest ciągła na $[1,\infty)$. Całka $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ jest z założenia zbieżna i równa pewnemu M. Ponadto f jest nieujemna na $[1,\infty)$. Zatem dla $F(y)=\int\limits_1^y f(x)\,dx$ mamy $0\le F(y)\le M$ dla każdego $y\ge 1$ (tzn. F jest ograniczona na $[1,\infty)$).
- Funkcja $g(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ ma ciągłą pochodną i jest nierosnąca na przedziale $[1,\infty)$ oraz $\lim\limits_{y\to\infty} g(y)=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{y}}=0$.
- Na mocy kryterium Dirichleta wnioskujemy stąd, że całka $\int\limits_1^\infty f(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ jest zbieżna, a tym samym otrzymujemy, że zbieżna jest całka $\int\limits_1^\infty f(x^2)\,dx.\blacksquare$

(b) Odpowiednik twierdzenia z punktu (a) dla całek niewłaściwych drugiego rodzaju nie jest prawdziwy, ponieważ dla $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$ całka $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 x^{-\frac{2}{3}}dx=3$, czyli jest zbieżna, natomiast całka $\int\limits_0^1 f(x^2)\,dx=\int\limits_0^1 x^{-\frac{4}{3}}dx=+\infty$, czyli jest rozbieżna.