MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Mateusz Sroka**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 9 z listy 4.

(a) Pokazać na przykładzie całki $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)\,dx$, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ nie jest warunkiem koniecznym zbieżności całki niewłaściwej $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

(b) Dowieść, że jeśli f jest funkcją nierosnącą na $[a,\infty)$, to zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ implikuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Rozwiązanie:

(a)

- Zauważmy, że $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)\,dx = \left[\begin{array}{c} x=\sqrt{y} \\ dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}} \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \infty \\ \hline y & 1 & \infty \end{array} \end{array}\right] = \int\limits_1^\infty \sin(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{(y)}}dy.$

  Funkcja $f(x) = \sin x$ jest ciągła na $[1,\infty)$, a $F(y) = \int\limits_1^y \sin(x)\,dx = \cos 1 - \cos y$ jest na tej półprostej ograniczona (bo $|F(y)| \le |\cos 1| + |\cos y| \le 2 \;\; \forall\, y \ge 1$).

  Funkcja $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ma ciągłą pochodną i jest nierosnąca na $[1,\infty)$ oraz $\lim\limits_{y\to\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{y}} = 0$.

  Na mocy kryterium Dirichleta możemy wywnioskować stąd, że całka $\int\limits_1^\infty \sin(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{(y)}}dy$, a tym samym $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)\,dx$, jest zbieżna.

- Jednocześnie, granica $\lim\limits_{x\to\infty}\sin(x^2) \ne 0$, bo dla podciągu $x_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to \infty$ otrzymujemy $\sin(x_n^2) \to 1 \ne 0$.

  (W istocie, granica ta nie istnieje, ponieważ dla innego podciągu $x_n = \sqrt{n\pi} \to \infty$ mamy $\sin(x_n^2) \to 0 \ne 1$.)

- Powyższy przykład pokazuje, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ nie jest warunkiem koniecznym zbieżności całki niewłaściwej $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

(b) ***Założenia:*** f jest funkcją nierosnącą na $[a, \infty)$ oraz całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna.

Teza: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0.$

Dowód (nie wprost):

- Ponieważ f jest nierosnąca na $[a, \infty)$, istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, właściwa lub niewłaściwa, oraz $f(x) \geq g \ \ \forall\, x \geq a$.
- Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $g \neq 0$.
- Jeżeli $g > 0$, to także $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = g > 0$. Jednocześnie f jest wtedy nieujemna i przy podanych założeniach na mocy kryterium całkowego możemy wywnioskować, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny, a stąd $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \ 0$, co daje sprzeczność.
- Jeżeli $g < 0$, to istnieją takie $x_0 \geq a$ i $C > 0$, że $f(x) < -C \quad \forall\, x \geq x_0$. Wtedy $\forall\, x \geq x_0 \quad 0 < C < -f(x)$ i całka $\int\limits_{x_0}^\infty C dx$ jest rozbieżna, a stąd całka $\int\limits_{x_0}^\infty (-f(x)) dx$ jest rozbieżna na mocy kryterium porównawczego, co daje sprzeczność z założeniem, że całka $\int\limits_a^\infty f(x) dx$ jest zbieżna.
- Otrzymujemy zatem, że $g = 0$.$\blacksquare$