MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Jakub Orliński**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 10 z listy 5.

Wyznaczyć kąt pomiędzy gradientami funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $g(x, y) = \sqrt{3xy}$ w punktach leżących na półprostej $y = (2 + \sqrt{3})x,\ x > 0$. Wyjaśnić dlaczego taki sam kąt otrzymujemy dla punktów leżących na półprostej $y = (2 - \sqrt{3})x,\ x > 0$.

Rozwiązanie:

- **Gradientem** (lub gradientowym polem wektorowym) funkcji skalarnej $f(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy wektor, którego składowe są pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f względem kolejnych współrzędnych, tzn.
$$\mathrm{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

- Dla $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ wyliczamy gradient i otrzymujemy dla $(x, y) \neq (0, 0)$
$$\mathrm{grad} f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$
Podobnie, dla $g(x, y) = \sqrt{3xy}$ otrzymujemy dla $xy > 0$
$$\mathrm{grad} g(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}y}{2\sqrt{xy}}, \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{xy}}\right).$$

- W punktach leżących na półprostej $y = ax,\ x > 0$, (gdzie $a > 0$) gradienty te są stałe i równe
$$\vec{u}_a = \mathrm{grad} f(x, ax) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2x^2}}(x, ax) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(1, a),$$
$$\vec{v}_a = \mathrm{grad} g(x, ax) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{ax^2}}(ax, x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a}}(a, 1).$$
Kąt między tymi gradientami $\alpha_a = \angle(\vec{u}_a, \vec{v}_a) \in [0, \pi]$ jest taki, że
$$\cos \alpha_a = \frac{\langle \vec{u}_a, \vec{v}_a \rangle}{||\vec{u}_a|| \cdot ||\vec{v}_a||} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a}\sqrt{1+a^2}} \cdot 2a}{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{1 + a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a}}\sqrt{1 + a^2}} = \frac{2a}{1 + a^2}.$$

- W punktach leżących na półprostej $y = (2 + \sqrt{3})x,\ x > 0$, otrzymujemy
$$\cos \alpha_{2+\sqrt{3}} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{1 + (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$
a stąd kąt między gradientami funkcji f i g w tych punktach to $\alpha_{2+\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.

- Podobnie, w punktach leżących na półprostej $y = (2 - \sqrt{3})x,\ x > 0$, mamy
$$\cos \alpha_{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 + (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$
a stąd $\alpha_{2-\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$.

- Otrzymaliśmy $\alpha_{2-\sqrt{3}} = \alpha_{2+\sqrt{3}}$. Równość tę można uzasadnić bez wykonywania obliczeń: Ponieważ $f(x, y) = f(y, x)$ oraz $g(x, y) = g(y, x)$ dla dowolnych $x, y > 0$, więc kąt między gradientami w punkcie $(x, (2 + \sqrt{3})x)$, należącym do półprostej $y = (2 + \sqrt{3})x,\ x > 0$, jest taki sam, jak w punkcie $((2 + \sqrt{3})x, x) = (2 + \sqrt{3})\left(x, \frac{x}{2+\sqrt{3}}\right) = (2 + \sqrt{3})\left(x, \frac{x}{2+\sqrt{3}}\right) = (2 + \sqrt{3})\left(x, (2 - \sqrt{3})x\right)$, należącym do półprostej $y = (2 - \sqrt{3})x,\ x > 0$.