MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Jakub Orliński**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 11 z listy 5.

Wyznaczyć punkty przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w których gradienty funkcji

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2, \quad g(z, y, z) = 2x^2 + y^2 - 2z$$

(a) są liniowo niezależne, (b) są do siebie prostopadłe.

Rozwiązanie:

- **Gradientem** (lub gradientowym polem wektorowym) funkcji skalarnej $f(x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy wektor, którego składowe są pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f względem kolejnych współrzędnych, tzn.

$$\text{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

- Dla $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ mamy $\text{grad} f(x, y, z) = (2x, 4y, 4z)$,
a dla $g(z, y, z) = 2x^2 + y^2 - 2z$ otrzymujemy $\text{grad} g(x, y, z) = (4x, 2y, -2)$.

(a) $\text{grad} f$ i $\text{grad} g$ są **liniowo zależne** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $k \neq 0$ takie, że:

$$\text{grad} f = k \cdot \text{grad} g.$$

W badanym przypadku szukamy zatem wszystkich takich x, y, z, dla których istnieje $k \neq 0$ takie, że

$$(2x, 4y, 4z) = k \cdot (4x, 2y, -2)$$

Porównując trzecie składowe widzimy, że musi zachodzić $4z = -2k \Leftrightarrow k = -2z$. Zatem możemy zadanie do uprościć do poszukiwania wszystkich takich x, y, z, dla których

$$(2x, 4y, 4z) = -2z \cdot (4x, 2y, -2), \quad z \neq 0,$$

co jest równoważne układowi warunków

$$\begin{cases} 2x = -8xz \\ 4y = -4yz \\ z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(1 + 4z) = 0 \\ y(1 + z) = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Z postaci (1) widać, że

$$(1) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 + 4z = 0 \\ y = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ 1 + z = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 + 4z = 0 \\ 1 + z = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases} \vee \text{układ sprzeczny}$$

Ostatecznie otrzymujemy, że zbiór punktów, w których gradienty funkcji f i g są liniowo zależne, to

$$\{(x, 0, -\frac{1}{4}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, y, -1) : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

(b) $\text{grad} f$ i $\text{grad} g$ są do siebie **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0; tzn, gdy:

$$\langle \text{grad} f, \text{grad} g \rangle = 8x^2 + 8y^2 - 8z = 0 \iff z = x^2 + y^2.$$

Podsumowując, zbiór punktów, w których gradienty funkcji f i g są do siebie prostopadłe, to

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$