MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Joanna Wojdyło**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 13 z listy 5.

Obliczyć pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(0,0)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, jeśli

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rozwiązanie:

- Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wektora $\vec{v} = (v_x, v_y)$ definiujemy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

- Dla funkcji $f(x,y)$, punktu $(x_0, y_0) = (0,0)$ oraz wektora $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(0 + \frac{4}{5}t, 0 - \frac{3}{5}t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{4}{5}t, -\frac{3}{5}t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{(\frac{4}{5}t)^3 - (-\frac{3}{5}t)^3}{(\frac{4}{5}t)^2 + (-\frac{3}{5}t)^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{4^3+3^3}{5^3} \cancel{t^3}}{\frac{4^2+3^2}{5^2} \cancel{t^3}} = \frac{64+27}{5(16+9)} = \frac{91}{125}.$$