MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Joanna Wojdyło**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 14 z listy 5.

Wyznaczyć wektory jednostkowe $\vec{v}$, dla których pochodna $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p)$ funkcji

$$f(x,y) = \ln(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1})$$

w punkcie $p = (2, -2)$ przyjmuje wartości: 0, $-{}^1/_9$.

Rozwiązanie:

- Szukamy wektora postaci $\vec{v} = (v_x, v_y)$ o długości $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$, dla którego $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p)$ przyjmuje zadaną wartość.

- Wykorzystamy następujące twierdzenie:

  Twierdzenie 1
  Jeśli funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie p, to pochodną kierunkową tej funkcji w kierunku wektora $\vec{v}$ możemy obliczyć ze wzoru:

  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = \operatorname{grad} f(p) \circ \vec{v}.$$

- Obliczmy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanej funkcji f dla (x, y) z otoczenia punktu $p = (2, -2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right) = \\
&= \frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\right), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\right).
\end{aligned}$$

  Powyższe pochodne cząstkowe funkcji f są ciągłe w punkcie p, co pozwala nam zastosować Twierdzenie 1.

- Potrzebny nam jest gradient funkcji f w podanym punkcie p:

$$\operatorname{grad} f(2,-2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,-2), \frac{\partial f}{\partial y}(2,-2)\right) =$$
$$= \frac{1}{2+(-2)+\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}, 1+\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}\right) = \tfrac{1}{9}(5,1).$$

- Z Twierdzenia 1. otrzymujemy, że $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-2) = \operatorname{grad} f(2,-2) \circ \vec{v} = \frac{1}{9}(5,1) \circ (v_x, v_y) = \frac{1}{9}(5v_x + v_y)$.

- Wyznaczyć teraz możemy wersory $\vec{v}$, dla których pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p)$ w punkcie $p = (2,-2)$ przyjmuje wartość 0, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = 0 \\ |\vec{v}| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{9}(5v_x + v_y) = 0 \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y = -5v_x \\ 26v_x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{26}} \\ v_y = \mp\dfrac{5}{\sqrt{26}} \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa wersory: $\vec{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}}\right)$ oraz $\vec{v_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$ spełniające zadany warunek.

- Analogicznie znajdziemy wersory $\vec{v}$, dla których pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p)$ w punkcie $p = (2,-2)$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{9}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = -\dfrac{1}{9} \\ |\vec{v}| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{9}(5v_x + v_y) = -\dfrac{1}{9} \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y = -(1+5v_x) \\ v_x^2 + v_y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x^2 + 1 + 10v_x + 25v_x = 1 \\ v_y = -(1+5v_x) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x(26v_x + 10) = 0 \\ v_y = -(1+5v_x) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} v_x = -\dfrac{5}{13} \\ v_y = \dfrac{12}{13} \end{cases}$$

Otrzymujemy, że drugi warunek jest spełniony dla dwóch wersorów: $\vec{v_3} = (0,-1)$ i $\vec{v_4} = (-\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.