MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

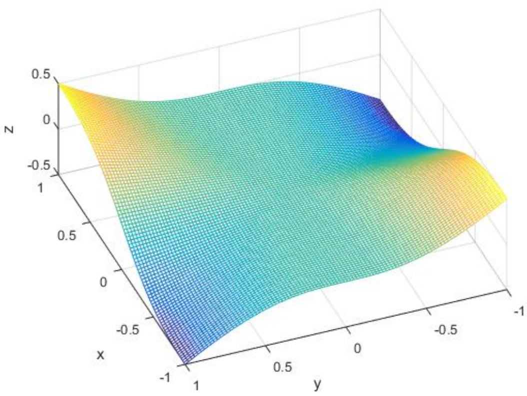
Opracowanie: **Marta Remplewska**, II rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 6 z listy 5

Wyznaczyć punkty płaszczyzny, w których pochodne mieszane funkcji f są sobie równe

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rozwiązanie:



Rysunek 1: Wykres funkcji f

- W pierwszym kroku wyznaczmy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f. Dla $(x,y) \neq (0,0)$ mamy z własności operacji różniczkowania

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x(x^2+y^2) - 2y^4x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3y^2x^3 + y^4x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Natomiast $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ wyliczymy korzystając z definicji:

Definicja:

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), pochodna cząstkowa funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

(o ile granica istnieje i jest skończona), a pochodna cząstkowa funkcji f względem y w punkcie (x_0, y_0) to

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

(o ile granica istnieje i jest skończona).

Dla badanej funkcji otrzymujemy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x+0,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2}-0}{\Delta x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,\Delta y+0)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{\Delta y^3\cdot 0}{\Delta y^2}-0}{\Delta y} = 0.$$

Podsumowując:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y)=(0,0). \end{cases} \tag{1}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3y^2x^3+y^4x}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{dla } (x,y)=(0,0). \end{cases} \tag{2}$$

- Teraz możemy analogicznie wyznaczyć pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu funkcji f wyliczając odpowiednie pochodne cząstkowe funkcji zadanych wzorami (1) i (2).
  Z własności operacji różniczkowania otrzymujemy dla $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3y^2x^3+y^4x}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \frac{(9x^2y^2+y^4)(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)\cdot 2x(3y^2x^3+y^4x)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{9x^4y^2+9x^2y^4+x^2y^4+y^6-12x^4y^2-4x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-3x^4y^2+6x^2y^4+y^6}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \frac{(5y^4-3x^2y^2)(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)\cdot 2y(y^5-x^2y^3)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{5x^2y^4+5y^6-3x^4y^2-3x^2y^4-4y^6+4x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-3x^4y^2+6x^2y^4+y^6}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

  Widzimy, że pochodne mieszane drugiego rzędu funkcji f w każdym punkcie $(x,y)\neq(0,0)$ są sobie równe.

  Natomiast $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ wyliczymy korzystając z definicji pochodnych cząstokwych dla funkcji (1) i (2):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x+0,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y+0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}-0}{\Delta y} = 1$$

  Otrzymujemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Wniosek: Pochodne mieszane drugiego rzędu funkcji f są sobie równe na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.