MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Karol Ziółkowski**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 2 z listy 6.

Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Udowodnić nierówność

$$\left(\int_b^a f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_b^a f^2(x)dx, \tag{1}$$

przy czym równość zachodzi jedynie dla funkcji stałych.

Rozwiązanie:

- Wprowadźmy oznaczenia

$$c_1 = \int_b^a f(y)dy,$$
$$c_2 = \int_b^a f^2(y)dy.$$

- Obliczmy całkę pomocniczą:

$$c_0 = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} (f(x)-f(y))^2\,dx\,dy = \int_b^a dx \int_b^a (f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y))dy =$$
$$= \int_b^a \left(f^2(x)(b-a) - 2f(x)\int_b^a f(y)dy + \int_b^a f^2(y)dy \right) dx =$$
$$= (b-a)\int_b^a f^2(x)dx - 2\int_b^a f(x)dx \int_b^a f(y)dy + \int_b^a f^2(y)dy(b-a) =$$
$$= 2(a-b)c_2 - 2c_1^2.$$

- Ponieważ $(f(x)-f(y))^2 \geqslant 0\ \forall_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]}$, mamy $c_0 \geqslant 0 \Leftrightarrow c_1^2 \leqslant (b-a)c_2 \Leftrightarrow (1)$.

- Ponadto, jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$, to $c_0 = 0 \Leftrightarrow (f(x)-f(y))^2 = 0\ \ \forall_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]} \Leftrightarrow f(x) = f(y)\ \ \forall_{x,y\in[a,b]}$. Zatem równość w nierówności (1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest stała na $[a,b]$.$\blacksquare$