MAT1331 Analiza Matematyczna 2

Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej

Opracowanie: **Dominika Ruczka**, I rok, Matematyka Stosowana

Zadanie nr 3 z listy 6.

Obliczyć całki podwójne

(a) $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y^2=2x$ i $x+y=4$;

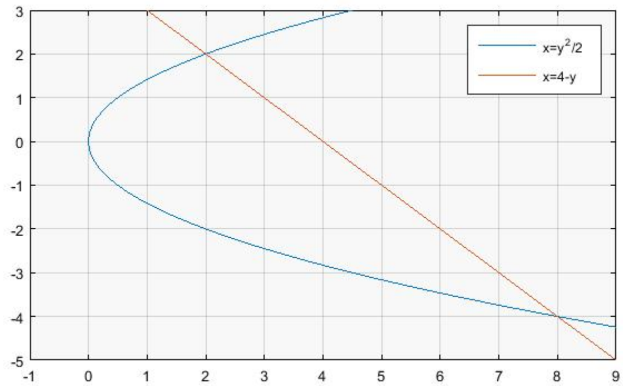
(b) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, gdzie D jest obszarem ograniczonym wykresami funkcji $y=\ln x$ i $y=\ln^2 x$.

Rozwiązanie:

(a)
- Wyznaczamy punkty przecięcia się krzywych $y^2=2x$ i $x+y=4$:

$$\begin{cases} y^2=2x \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{y^2}{2} \\ x=4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{2}=4-y \\ x=4-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y^2+2y-8=0 \\ (y+1)^2-9=0 \\ y+1=3 \vee y+1=-3 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-4 \\ x=8 \end{cases}$$



Obszar całkowania D.

- Obszar całkowania D ma więc następującą postać:

$$D=\{(x,y): -4\le y\le 2,\ \frac{y^2}{2}\le x\le 4-y\}$$

i jest normalny względem osi $0y$, a funkcja $f(x,y)=x-y$ jest ciągła na D.

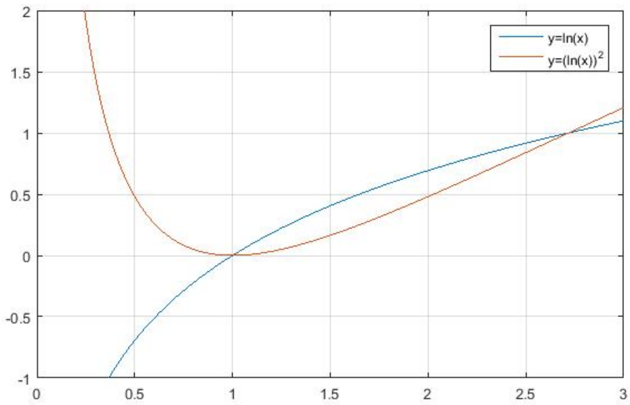
- Zatem możemy całkę podwójną zamienić na całki iterowane i wyliczyć

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x-y)dxdy &= \int\limits_{-4}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} (x-y)dx = \int\limits_{-4}^{2} \left(\left[\frac{x^2}{2} - y\cdot x \right]_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=4-y} \right) dy = \\
&= \int\limits_{-4}^{2} \left(\frac{(4-y)^2}{2} - y(4-y) - \frac{\left(\frac{y^2}{2}\right)^2}{2} + y\cdot\frac{y^2}{2} \right) dy = \\
&= \int\limits_{-4}^{2} \left(8 - 8y + \frac{3y^2}{2} + \frac{y^3}{2} - \frac{y^4}{8} \right) dy = \\
&= \left[8y - 8\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^4}{4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{y^5}{5} \right]_{-4}^{2} = 75\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

(b)

- Wyznaczamy punkty przecięcia się wykresów funkcji $y = \ln x$ i $y = \ln^2 x$:

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = \ln^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln^2 x \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ y = \ln x \end{cases} \vee \begin{cases} \ln x = 1 \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = e \\ y = 1 \end{cases}$$



Obszar całkowania D.

- Obszar całkowania D ma więc następującą postać:

$$D = \{(x, y) : 1 \le x \le e,\ \ln^2 x \le y \le \ln x\}$$

i jest normalny względem osi $0x$, a funkcja $f(x, y) = xy$ jest ciągła na D.

- Zatem możemy całkę podwójną zamienić na całki iterowane i wyliczyć

$$\iint\limits_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_1^e \mathrm{d}x \int\limits_{\ln^2 x}^{\ln x} xy \, \mathrm{d}y = \int\limits_1^e \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=\ln x}^{y=\ln^2 x} \right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(\frac{x \ln^2 x}{2} - \frac{x \ln^4 x}{2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int\limits_1^e x \ln^2 x \, \mathrm{d}x - \int\limits_1^e x \ln^4 x \, \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I_1} - \mathbf{I_2} \right),$$

gdzie

$$\mathbf{I_1} = \int\limits_1^e x \ln^2 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2 \ln^2 x}{2} \right]_1^e - \int\limits_1^e x \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left(\left[\frac{x^2 \ln x}{2} \right]_1^e - \frac{1}{2} \int\limits_1^e x \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(e^2 - 1 \right)$$

$$\mathbf{I_2} = \int\limits_1^e x \ln^4 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2 \ln^4 x}{2} \right]_1^e - 2 \int\limits_1^e x \ln^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - 2 \left(\left[\frac{x^2 \ln^3 x}{2} \right]_1^e - \frac{3}{2} \int\limits_1^e x \ln^2 x \, \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2 \left(\frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \mathbf{I_1} \right) = -\frac{e^2}{2} + \frac{3}{4} \left(e^2 - 1 \right) = \frac{1}{4} \left(e^2 - 3 \right)$$

Otrzymujemy zatem

$$\iint\limits_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I_1} - \mathbf{I_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (e^2 - 1 - e^2 + 3) = \frac{1}{4}$$