Analiza Matematyczna 2, Lista 1 **MST, W-13, 2016/17**
(Zastosowania całek oznaczonych)

1. Obliczyć pole płaskiego obszaru normalnego ograniczonego podanymi krzywymi

(a) $16y = x^2,\ 8x = y^3$; (b) $y = \ln x,\ y = \ln^2 x$; (c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ x + y = 1$.

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą parametryczną α i osią Ox

(a) $\alpha(t) = (2t - \sin t, 2 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; (b) $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t),\ -1 \leqslant t \leqslant 0$;
(c) $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t),\ -1 \leqslant t \leqslant 1$.

3. Obliczyć długość łuku krzywej płaskiej

(a) $\alpha\colon\ y = \ln(1 - x^2),\ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$;
(b) $\alpha(t) = \big((t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t\big),\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

4. Na cykloidzie

$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

znaleźć punkt, który dzieli jej długość w stusunku $1 : 3$.

5. Obliczyć długość łuku krzywej przestrzennej

(a) $\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1),\ 0 \leqslant t \leqslant 1$;
(b) $\alpha(t) = (at, \sqrt{3ab}\,t^2, 2bt^3),\ 0 \leqslant t \leqslant A,\ a > 0,\ b > 0$.

6. Niech ρ i φ będą współrzednymi biegunowymi na płaszczyźnie i niech krzywa płaska α zadana będzie we współrzędnych biegunowych warunkiem $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, gdzie f jest funkcją mającą ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$. Pokazać, że długość łuku krzywej α jest dana wzorem

$$L(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

7. Zastosować wzór otrzymany w poprzednim zadaniu do obliczenia długości krzywych

(a) $\alpha\colon \rho = a(1 - \cos\varphi),\ a > 0$; (b) $\alpha\colon \rho = \dfrac{a}{\cos(\varphi - \pi/3)},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

8. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej α wokół osi Ox

(a) $\alpha\colon\ y = e^{-x}\sqrt{\sin x},\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; (b) $\alpha\colon\ x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ (astroida).

9. Obliczyć pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej α wokół osi Ox

(a) $\alpha\colon\ y = \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$;

(b) $\alpha\colon\ x = \dfrac{t^3}{3},\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}$ pomiędzy punktami jej przecięcia z osiami współrzędnych.

10. Znaleźć środek masy krzywej płaskiej z funkcją gęstości masy $\sigma = 1$

(a) $\alpha\colon y = \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{x}{3}\right),\ 0 \leqslant x \leqslant 3$; (b) $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

11. Znaleźć środek masy obszaru płaskiego D z funkcją gęstości masy $\sigma = c = \text{const}$.

(a) D - obszar ograniczony krzywymi $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$ $(x \geqslant 0)$;

(a) D - obszar ograniczony krzywą $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$ i osiami współrzędnych.

12. Niech

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

przy czym przyjmujemy, że w punktach $-\pi, 0, \pi$ funkcja podcałkowa przyjmuje wartości (jakie?) gwarantujące jej ciągłość na całym przedziale całkowania. Pokazać, że

(a) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$; (b) $I_n = I_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$. Obliczyć I_n dla wszystkich $n \geqslant 0$.

13. Dla $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, przyjmijmy

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx, \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx, \qquad K_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx.$$

(a) Udowodnić następujące związki

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \ \ I_1 = 1, \ \ I_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_{n-2} \ \text{ dla } \ n \geqslant 2; \ \ J_n = I_n; \ \ K_n = I_{2n+1}.$$

(b) Następnie pokazać, że

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ gdy } n \text{ jest nieparzyste}; \qquad I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ gdy } n \text{ jest parzyste}.$$

(c) Wyznaczyć K_n.