Analiza Matematyczna 2, Lista 2 **MST, W-13, 2016/17**
(Szeregi liczbowe)

1. Wyznaczyć ciągi sum częściowych szeregów, a następnie sprawdzić ich zbieżność

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(d) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}+\ldots$

2. Wyjaśnić dlaczego poniższe szeregi są rozbieżne

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2-1}\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{n\,(-1)^n}$.

3. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych posługując się sugerowanymi kryteriami zbieżności

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$ (kryterium porównawcze);

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{3^n-2^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ (kryterium d'Alemberta);

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{3}\cdot n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$ (kryterium Cauchy'ego);

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-2\alpha}}\cos\frac{1}{n}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\arcsin(1/n)}-1\right)^2$ (kryterium ilorazowe).

4. Korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregu wykazać, że

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\,n!}{(2n)^n}=0$; (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+10}{3n+10}\right)^n=0$.

5. Zbadać zbieżność szeregów liczbowych

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n+1}{3n-1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^3}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sin\frac{1}{n}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}$.

6. Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem monotonicznie zmierzającym do 0. Skorzystać z kryterium Dirichleta i zbadać zbieżność poniższych szeregów w zależności od wartości $x\in\mathbb{R}$

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$.

7. Pokazać, że jeśli szeregi liczbowe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ są zbieżne bezwzględnie, to szeregi

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$

także są zbieżne bezwzględnie. Czy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$?

8. Który z podanych poniżej szeregów jest zbieżny bezwzględnie, a który warunkowo

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(n+1)}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^4}{3^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$?

9. Ile pierwszych wyrazów szeregu należy wziąć, aby ich suma różniła się od sumy szeregu mniej niż o 10^{-1}, 10^{-2}

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$?

10. Pokazać na przykładzie szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2+(-1)^n}{n},$$

że założenie $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 \geqslant \ldots$ w kryterium Leibniza dotyczącym szeregu naprzemiennego jest istotne. [Szereg naprzemienny to szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, przy czym $c_n \geqslant 0$ dla każdego n.]

11. Wyznaczyć iloczyn Cauchy'ego szeregów

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, $|q|<1$.

Podać sumę otrzymanego szeregu.

12. Załóżmy, że szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ jest zbieżny i niech $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ będzie n-tą sumą częściową tego szeregu. Wykazać, że dla $|q|<1$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^n$ jest zbieżny i zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^n.$$

13. Udowodnić, że iloczyn Cauchy'ego dwóch szeregów o wyrazach dodatnich, z których co najmniej jeden jest rozbieżny, jest zawsze szeregiem rozbieżnym.