Analiza Matematyczna 2, Lista 4 **MST, W-13, 2016/17**
(Całki niewłaściwe)

1. Obliczyć całki niewłaściwe lub pokazać, że są rozbieżne

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\pi x\sin x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{e^e}^\infty \frac{dx}{x\ln x\ln^2(\ln x)}$.

2. Obliczyć całki niewłaściwe lub pokazać, że są rozbieżne

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-|x|}}$; (c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

3. Skorzystać z kryterium porównawczego i sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sin 2x\,dx}{x\,e^{-x}+x^2-1}$; (c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x\,(\ln x-\sin x)}$.

4. Skorzystać z kryterium ilorazowego i sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}\cdot\sqrt[5]{x^2+1}}$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+\sqrt[4]{x^{11}})}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{x+\sin x+\operatorname{tg} x}$.

5. Skorzystać z kryterium Dirichleta i pokazać zbieżność całek niewłaściwych

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha>0$.

6. Sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^{30}}$; (b) $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x}\ln x\,dx$; (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x}\sin x\,dx$.

7. Wykorzystując kryterium całkowe, sprawdzić zbieżność szeregów liczbowych

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

8. (a) Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[1,\infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int_1^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, to całka $\int_1^\infty f(x^2)dx$ też jest zbieżna. Wskazówka: Podstawić $x=\sqrt{y}$ i skorzystać z Kryterium Dirichleta.

(b) Czy prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia z podpunktu (a) dla całki niewłaściwej drugiego rodzaju, np. $\int_0^a f(x)dx$, $a>0$?

9. (a) Pokazać na przykładzie całki $\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx$, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ nie jest warunkiem koniecznym zbieżności całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x)dx$.

(b) Dowieść, że jeśli f jest funkcją nierosnącą na $[a,\infty)$, to zbieżność całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x)dx$ implikuje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

10*. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,\infty)$ oraz istnieje stała $C>0$ taka, że $|f'(x)|\leqslant C$ dla każdego $x\in[a,\infty)$. Dowieść, że jeśli całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna bezwzględnie, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.