Analiza Matematyczna 2, Lista 6 **MST, W-13, 2016/17**
(Całki wielokrotne)

1. Obliczyć poniższe całki

(a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$, $D=[0,1]\times[0,1]$; (b) $\displaystyle\iint_D x\sin(xy)\,dxdy$, $D=\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$;

2. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$. Udowodnić nierówność

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

przy czym równość zachodzi jedynie dla funkcji stałych. Wskazówka. Skorzystać z całki podwójnej

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \big(f(x)-f(y)\big)^2\,dxdy.$$

3. Obliczyć całki podwójne

(a) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dxdy$, D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y^2=2x$ i $x+y=4$;

(b) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, D jest obszarem ograniczonym wykresami funkcji $y=\ln x$ i $y=\ln^2 x$.

4. Całka podwójna po obszarze D zamienia się na całkę iterowaną postaci

$$\int_0^1 dy\int_0^{y^2+1} f(x,y)\,dx.$$

Opisać obszar całkowania D i zaproponować zamianę tej całkę na inną całkę iterowaną.

5. Podać opis obszaru D we współrzędnych biegunowych (ρ,ϕ), jeśli we współrzędnych kartezjańskich jego opis wygląda następująco:

(a) $D\colon 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 16,\ x\leqslant 0,\ y\geqslant 0$; (b) $D\colon (x-1)^2+y^2\leqslant 1$.

W punkcie (b) podać też inny prosty opis obszaru, w którym układ biegunowy zostaje równolegle przesunięty do odpowiedniego punktu.

6. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{y}{x}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,$$

gdzie D jest obszarem określonym nierównościami $x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant \sqrt{3}\,x$.

7. Wyznaczyć środek masy obszaru $D\colon x^2+y^2\leqslant 9,\ x\geqslant 0$, jeśli $\sigma(x,y)=x$ jest funkcją gęstości masy.

8. Obliczyć poniższe całki

(a) $\displaystyle\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz$, $V=[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$;

(b) $\displaystyle\iiint_V yz^2\,e^{xyz}\,dxdydz$, $V=[0,1]\times[-1,0]\times\left[\ln\frac{1}{2},\ln 2\right]$;

9. Obliczyć całkę

(a) $\iiint_V z\,dxdydz$, gdzie V jest obszarem ograniczonym stożkiem $z = \sqrt{x^2+y^2}$ i płaszczyną $z=1$;

(b) $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, dzie obszar $V \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczonym płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

10. Wyznaczyć objętość i środek masy obszaru przestrzennego V przy zadanej funkcji gęstości masy σ, jeśli

(a) V - obszar ograniczony powierzchniami $z=0$, $z=x^2+y^2+1$, $x^2+y^2=1$, $\sigma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$;

(b) $V: 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $\sigma(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.