Analiza Matematyczna 2, Lista 7 **MST, W-13, 2016/17**
(Szeregi Fouriera)

1. Wyznaczyć sumę s szeregu Fouriera funkcji f. Skorzystąc z sumy s i wyliczyć podane sumy szeregów liczbowych

(a) $f(x) = x$, $-\pi < x \leqslant \pi$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

(b) $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90};$$

(c) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{gdy} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ 1, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant x < \pi \end{array}\right\}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

2. Załóżmy, że funkcja f całkowalna na przedziale $[-\pi, \pi]$ i a_n, b_n oznaczają współczynniki Fouriera funkcji f. Pokazać, że

(a) jeśli $f(x + \pi) = f(x)$, to $a_{2m-1} = b_{2m-1} = 0$;

(b) jeśli $f(x + \pi) = -f(x)$, to $a_{2m} = b_{2m} = 0$.

3*. Jak rozwijać funkcję f całkowalną na przedziale $[0, \pi]$ w szereg Fouriera złożony z samych: kosinusów; sinusów?

(a) Funkcję $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x < \pi$, rozłożyć w szereg Fouriera złożony z samych sinusów.

(b) Funkcję $f(x) = x$, $0 \leqslant x < \pi$, rozłożyć w szereg Fouriera złożony z samych kosinusów.

4. Jak wyglądają szeregi Fouriera funkcji

(a) $f(x) = \sin^2 x$; (b) $f(x) = \cos^2 x$; (c) $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$; (d) $f(x) = \cos^4 x$?