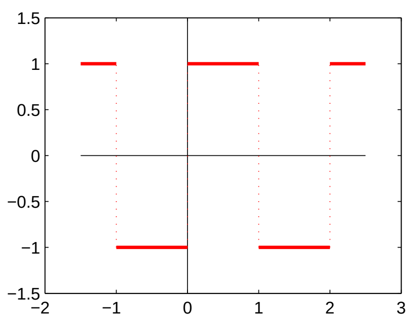
Przykład **P13***:*

Sygnał o przebiegu prostokątnym, okresowy o okresie $2T$:

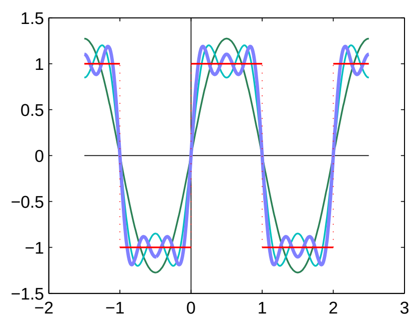
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 < t < T \\ -1 & \text{dla} \quad -T < t < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t = -T, 0, T. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja nieparzysta.
  Zatem $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \ldots$.
  Obliczamy b_n:
  $$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T}\left(-\frac{T}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T =$$
  $$= \frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{dla} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}, \; k = 1, 2, \ldots$$
- Zatem sygnał prostokątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:

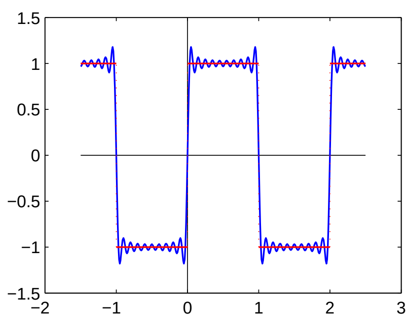
$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{T}\right)$$



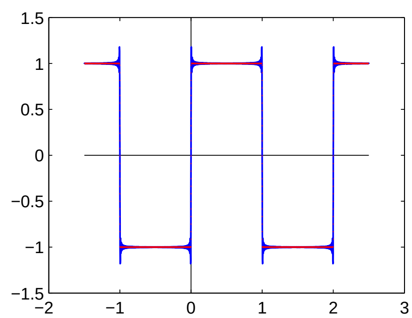
sygnal o przebiegu prostokatnym



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=1, 2, 3



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=10



suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=100

***Przykład* P14:**

Sygnał trójkątny, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad 0 < t \leqslant T \\ -t & \text{dla} \quad -T \leqslant t < 0. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja parzysta.
  Zatem $b_n = 0$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$.

  Obliczamy a_n:

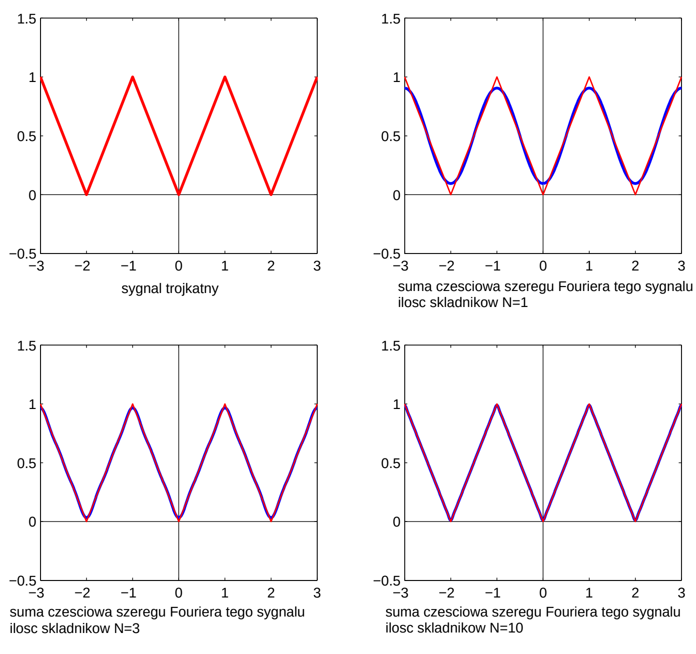
  $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T t dt = T$$

  $$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^T t\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{n\pi}\right)\left(t\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T - \int_0^T \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt\right) =$$

  $$= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{T}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T = \frac{2T((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{4T}{n^2\pi^2} & \text{dla} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}, \; k = 1, 2, \ldots$$

- Zatem sygnał trójkątny rozwija się w następujący szereg Fouriera:

  $$f(t) = \frac{T}{2} + \frac{2T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{T}\right)$$



Przykład* P15*:

Sygnał o przebiegu piłowym, okresowy o okresie $2T$:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad -T < t < T \\ 0 & \text{dla} \quad t = -T, T. \end{cases}$$

- Funkcja ta spełnia warunki Dirichleta.
- Na przedziale $[-T, T]$ jest to funkcja nieparzysta.
  Zatem $a_n = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \ldots$.

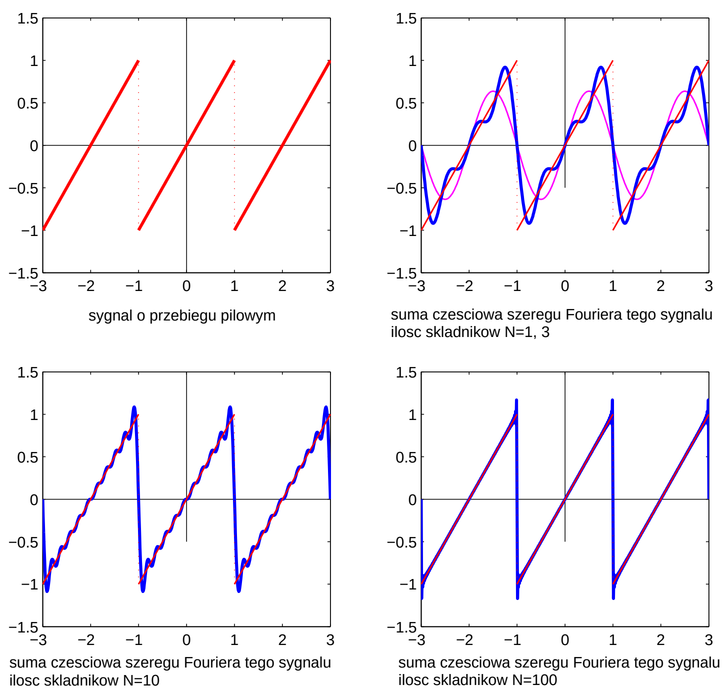
  Obliczamy b_n:

  $$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{n\pi}\right)\left(-t\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T + \int_0^T \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)dt\right) =$$

  $$= \frac{2}{n\pi}\left(-(-1)^n T + \frac{T}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\Big|_0^T\right) = \frac{2T(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

- Zatem sygnał piłowy rozwija się w następujący szereg Fouriera:

$$f(t) = \frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$



sygnal o przebiegu pilowym

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=1, 3

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=10

suma czesciowa szeregu Fouriera tego sygnalu
ilosc skladnikow N=100