Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 1. Rozwiązanie zadania 1.1 (b) i (c)

Opracowanie: Kinga Włodarczyk

Zadanie **1.1**

(b) Uzasadnij podaną na wykładzie konstrukcję przestrzeni probabilistycznej o skończonej liczbie stanów.

(c) Uzasadnij podaną na wykładzie konstrukcję przestrzeni probabilistycznej o nieskończonej przeliczalnej liczbie stanów.

Rozwiązanie podpunktu (b):

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - zbiór **skończony**,
$\mathcal{F} = 2^\Omega$ - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru Ω,
każde prawdopodobieństwo P można wtedy skonstruować w następujący sposób:

- wybieramy liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$ spełniające warunki $p_i \geqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,
- definiujemy $P(\{\omega_i\}) := p_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Z własności prawdopodobieństwa mamy wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i.$$

Zacznijmy od uzasadnienia powyższego wzoru:

$$A \subset \Omega - \text{zbiór skończony} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = \bigcup_{\{i\,:\,\omega_i \in A\} \subset \{1,\dots,n\}} \{\omega_i\}$$

$$\text{oraz} \;\; \{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \emptyset \quad \text{dla} \quad i \neq j \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; A \text{ to suma przeliczalna zbiorów parami rozłącznych} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = P\left(\bigcup_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} \{\omega_i\}\right) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} P\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i,$$

– jeśli P ma istotnie być prawdopodobieństwem.

Żeby udowodnić podaną konstrukcję, należy pokazać, że określone wyżej $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Sprawdzamy kolejne własności, jakie musi spełnić $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$, zgodnie z definicją przestrzeni probabilistycznej:

1. $\Omega \neq \emptyset$ – jest spełnione, ponieważ Ω zawiera przynajmniej jeden element.

2. $\emptyset \in \mathcal{F}$ – jest spełnione, ponieważ zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.
   $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ – jest spełnione, ponieważ, jeśli jakiś zbiór jest podzbiorem Ω, to jego dopełnienie również.
   $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ – jest spełnione, ponieważ, dowolna suma podzbiorów Ω też jest podzbiorem Ω.

3. (I) $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
   Dowód:
   Dla dowolnego $A \in 2^{\Omega}$ zachodzi:

$$\left.\begin{array}{l} \forall_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} \quad p_i \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \\ \{i \,:\, \omega_i \in A\} \subset \{1, 2, \ldots, n\} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i \overset{(2)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

   (1) - bo sumujemy wyrazy nieujemne, (2) - bo $\{i \,:\, \omega_i \in A\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ i zachodzi (1). Zatem $\forall_{A\in 2^{\Omega}}\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ i warunek (I) jest spełniony. ■

   (II) $P(\Omega) = 1$
   Dowód:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \\ \{i \,:\, \omega_i \in \Omega\} = \{1, 2, \ldots, n\} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\Omega) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in \Omega\}} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad ■$$

   (III) Dla $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, parami rozłącznych (tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$)

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right)$$

   Dowód:

$$A_k \cap A_j = \emptyset \quad \forall_{k\neq j} \Rightarrow \{i \,:\, \omega_i \in A_k\} \cap \{i \,:\, \omega_i \in A_j\} \neq \emptyset \quad \forall_{k\neq j}$$

   oraz

$$\{i \,:\, \omega_i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{i \,:\, \omega_i \in A_k\},$$

   przy czym sumujemy tu zbiory indeksów parami rozłączne. Ponadto, $\forall_k\ \{i \ :\in A_k\} \subset \{1, ..., n\}$. Zatem $\{i \,:\, \omega_i \in A_k\} \neq \emptyset$ jedynie dla k z pewnego skończonego zbioru. Stąd:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}} p_i = \sum_{i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{i\,:\,\omega_i \in A_n\}} p_i \overset{(3)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A_n\}} p_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right).$$

   Krok (3) jest uzasadniony, bo po lewej stronie mamy sumę skończoną, a po prawej formalnie nieskończoną, ale w której tylko skończona ilość składników jest różna od 0 (czyli w istocie mamy tu też sumę skończoną), możemy więc permutować i grupować wyrazy tej sumy. ■

Rozwiązanie podpunktu (c):

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ - zbiór **nieskończony, przeliczalny**,
$\mathcal{F} = 2^\Omega$ - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru Ω,
każde prawdopodobieństwo P można wtedy skonstruować w następujący sposób:

- wybieramy ciąg liczbowy $p_1, p_2, \ldots$ spełniający warunki $p_i \geqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,
- definiujemy $P(\{\omega_i\}) := p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$.

Z własności prawdopodobieństwa mamy wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i.$$

Powyższy wzór możemy uzasadnić tym samym sposobem, który był używany w podpunkcie (b).

Dowód przeprowadzamy również analogicznie jak w podpunkcie (b). Własności 1., 2. są spełnione (uzasadnienie identyczne jak w (b)).
Podobnie jak w (b) pokazujemy własność 3.

(I) $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$
Dowód:
Dla dowolnego $A \in 2^\Omega$ zachodzi:

$$\left.\begin{array}{l} \forall_{i \in \mathbb{N}} \quad p_i \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \\ \{i\,:\,\omega_i \in A\} \subset \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \overset{(1)}{\leqslant} \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in A\}} p_i \overset{(4)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

(1) - bo sumujemy wyrazy nieujemne, (4) - bo $\{i\,:\,\omega_i \in A\} \subset \mathbb{N}$ i zachodzi (1). Zatem $\forall_{A \in 2^\Omega}\ 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ i warunek (I) jest spełniony. ■

(II) $P(\Omega) = 1$
Dowód:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \\ \{i\,:\,\omega_i \in \Omega\} = \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\Omega) = \sum_{\{i\,:\,\omega_i \in \Omega\}} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \quad \blacksquare$$

(III) Własność (III) również udowadniamy tak samo jak w podpunkcie (b), jedynie musimy inaczej uzasadnić krok (3). Tutaj po lewej stronie mamy sumę, która może być nieskończona, przeliczalna. Ale wyrazy tego szeregu są nieujemne i jest on zbieżny bezwzględnie. Więc permutacja i grupowanie wyrazów nie zmienia sumy tego szeregu. Zatem krok (3) jest uzasadniony. ■