Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 2. Rozwiązanie zadania 2.1 (b), (c)

Opracowanie: Karolina Wojtaszewska

Zadanie **2.1**

(b) Udowodnij twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i wzór Bayesa.

(c) Pokaż, że $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$, o ile $P(A_n) = 1$ dla wszystkich n.

Rozwiązanie podpunktu (b):

DEFINICJA: **Prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, gdzie $A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$, nazywamy liczbę $P(A|B)$ daną wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

DEFINICJA: **Rozbiciem zbioru** Ω nazywamy rodzinę $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ zdarzeń losowych parami rozłącznych (tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) taką, że $\bigcup_{n \in \mathbb{T}} B_n = \Omega$.

TWIERDZENIE O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE CAŁKOWITYM:

Niech $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω takim, że $P(B_n) > 0$ dla każdego n. Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego A mamy

$$P(A) = \sum_{n \in \mathbb{T}} P(A|B_n)P(B_n).$$

Dowód twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

Niech A będzie dowolnym zdarzeniem losowym. Niech $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω. Zdarzenia z rozbicia są parami rozłączne, zatem:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{T}} (A \cap B_n)\right),$$

gdzie zdarzenia z rodziny $\{A \cap B_n, n \in \mathbb{T}\}$ są parami rozłączne. Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń parami rozłącznych jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń (na mocy trzeciej własności prawdopodobieństwa w jego definicji), zatem

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{T}} (A \cap B_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{T}} P(A \cap B_n) = \sum_{n \in \mathbb{T}} P(A|B_n)P(B_n)$$

Ostatnia równość wynika z definicji prawdopodobieństwa warunkowego podanej powyżej.
Otrzymujemy zatem, że $P(A) = \sum_{n \in \mathbb{T}} P(A|B_n)P(B_n)$.

$\square$

Wzór Bayesa:

Niech $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω takim, że $P(B_n) > 0$ dla każdego n. Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego A takiego, że $P(A) > 0$, i dla każdego $n \in \mathbb{T}$ mamy

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)}.$$

Dowód wzoru Bayesa:

Korzystając z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)}.$$

□

Rozwiązanie podpunktu (c):

- Pokażemy najpierw, że jeżeli $P(A_n) = 1$ dla każdego n, to $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.
  Dowód:
  Dla każdego dowolnego ustalonego N mamy: $P(A_N) = 1$. Korzystając z własności prawdopodobieństa: $P(A^c) = 1 - P(A)$, mamy, że $P(A_N^c) = 0$ dla każdego N. Wynika stąd, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 0$.
  Wiemy, że $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$, można więc udowodnić, że $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Zatem mamy $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$. W dodatku wiemy, że prawdopodobieństwo jest zawsze nieujemne, więc otrzymujemy:

  $$0 \leqslant P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = 0.$$

  Wynika stąd, że $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$. Ponadto z własności prawdopodobieństwa wiemy, że
  $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$, ponieważ $(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c$.
  Skoro $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 0$, to $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - 0 = 1$.

  □

- Udowodnimy teraz implikację w drugą stronę, tzn.
  jeżeli $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$, to $P(A_n) = 1$ dla każdego n.
  Dowód:
  Dla każdego dowolnego ustalonego N mamy $P(A_N) \geqslant P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, bo z własności prawdopodobieństwa wiemy, że jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$, a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ musi się zawierać w A_N. Z własności prawdopodobieństwa wiemy, że zawsze jest ono mniejsze bądź równe 1. Mamy więc dla dowolnego N:

  $$1 \geqslant P(A_N) \geqslant P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

  Stąd wynika, że $P(A_N) = 1$ dla każdego N.

  □