Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 2. Rozwiązanie zadania 2.1 (d)

Opracowanie: Paulina Konsór

Zadanie **2.1**

(d) Udowodnij lemat Borela-Cantelliego:

Niech $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ będzie będzie ciągiem zdarzeń losowych w $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definiujemy $A = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$. Wtedy:

1. Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ jest zbieżny, to $P(A) = 0$.

2. Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ jest rozbieżny i zdarzenia $A_i, i \in \mathbb{N}$, są niezależne, to $P(A) = 1$.

Dowód punktu 1.: Z definicji wiemy, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=m}^{\infty} A_i$. Wobec tego:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant P\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} P(A_i) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

na mocy założenia o zbieżności szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Stąd otrzymujemy tezę.

Dowód punktu 2. : Z zadania 2.1 (c):

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = 1 \Leftrightarrow \forall\, n \;\; P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = 1 \Leftrightarrow \forall\, n \;\; P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 0.$$

Z własności prawdopodobieństwa dla rodziny nierosnącej mamy:

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = \lim_{j\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{n+j} A_i^c\right).$$

Dla udowodnienia tezy wystarczy zatem pokazać, że:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \lim_{j\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{n+j} A_i^c\right) = 0.$$

Z niezależności zdarzeń $A_1, A_2 ...$ wynika, że dla dowolnych $n, j \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant P\left(\bigcap_{i=n}^{n+j} A_i^c\right) = \prod_{i=n}^{n+j} (1 - P(A_i)).$$

Z nierówności $1 - x \leqslant e^{-x}$ otrzymujemy ponadto dla dowolnych $n, j \in \mathbb{N}$, że:

$$\prod_{i=n}^{n+j} (1 - P(A_i)) \leqslant \prod_{i=n}^{n+j} e^{-P(A_i)} = e^{-\sum_{i=n}^{n+j} P(A_i)},$$

przy czym: $e^{-\sum_{i=n}^{n+j} P(A_i)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\infty} = 0$, ponieważ $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ jest rozbieżny.

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach mamy:

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{n+j} A_i^c\right) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

co kończy dowód.