Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 2. Rozwiązanie zadania 2.3 (b)

Opracowanie: Joanna Banachowicz

Zadanie **2.3**

(b) Jest 10 kartek z pytaniami egzaminacyjnymi. Losuje się jedną z nich w sposób przypadkowy. Kartka nr k zawiera najtrudniejszy zestaw pytań. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że żaden z pięciu zdających nie wylosuje kartki nr k, jeśli wylosowane już kartki

1. są odkładane;
2. nie są odkładane, tzn. mogą być ponownie wylosowane.

W którym z dwu rozważanych sposobów losowania zdarzenia polegające na wylosowaniu kartki nr k przez różne osoby zdające są niezależne?

Rozwiązanie:

Ad. 1.

- Określamy przestrzeń probabilistyczną:
  $\Omega = \{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) : k_i, i = 1, \dots 5,$ - wylosowane kartki z 10, istotna jest kolejność, bez powtórzeń$\}$,
  $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, P - prawdopodobieństwo klasyczne.

- $A_i = \{$wylosowanie kartki nr k przez i-tą osobę$\} = \{(k_1, \dots, k_5) \in \Omega : k_i = k\}, i = 1, 2, 3, 4, 5,$
  $B = \{$żaden student nie wylosował kartki $k\} = \{(k_1, \dots, k_5) \in \Omega : k_i \neq k \, \forall_i\}$

- $P(B) = \frac{\binom{9}{5} \cdot 5!}{\binom{10}{5} \cdot 5!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot \frac{5! \cdot 5!}{10!} = \frac{1}{2}$
  Wynika z tego, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że żaden z pięciu zdających nie wylosuje kartki nr k wynosi 0.5.

- Badamy niezależność zdarzeń A_1, A_2, A_3, A_4, A_5
  $\forall_i \quad P(A_i) = \frac{\binom{9}{4} \cdot 4!}{\binom{10}{5} \cdot 5!} = \frac{9!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{5! \cdot 5!}{10! \cdot 5} = \frac{1}{10}$
  $\forall_{i \neq j} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$
  $P(A_i \cap A_j) = 0 \neq \frac{1}{100} = P(A_i) \cdot P(A_j)$
  Wynika z tego, że zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nie są niezależne.

Ad. 2.

- Określamy przestrzeń probabilistyczną:
  $\Omega = \{(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) : k_i, i = 1, \dots 5,$ - wylosowane kartki z 10, istotna jest kolejność, z powtórzeniami$\}$,
  $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, P - prawdopodobieństwo klasyczne.

- $A_i = \{$wylosowanie kartki nr k przez i-tą osobę$\} = \{(k_1, \dots, k_5) \in \Omega : k_i = k\}, i = 1, 2, 3, 4, 5,$
  $B = \{$żaden student nie wylosował kartki $k\} = \{(k_1, \dots, k_5) \in \Omega : k_i \neq k \, \forall_i\}$

- $P(B) = \frac{9^5}{10^5} = (0.9)^5 \approx 0.59$
  Wynika z tego, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że żaden z pięciu zdających nie wylosuje kartki nr k wynosi 0.59.

- Badamy niezależność zdarzeń A_1, A_2, A_3, A_4, A_5
  $\forall_i \quad P(A_i) = \frac{10^4}{10^5} = \frac{1}{10}$

  $\forall_{i \neq j} \quad A_i \cap A_j = \{(k_1, \ldots, k_5) \in \Omega : k_i = k_j = k\}$
  $P(A_i \cap A_j) = \frac{10^3}{10^5} = \frac{1}{100}$
  $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{100} = P(A_i) \cdot P(A_j) \Rightarrow A_1, \ldots, A_5$ są parami niezależne.

  $\forall_{i,j,l \text{ różnych}} \quad A_i \cap A_j \cap A_l = \{(k_1, \ldots, k_5) \in \Omega : k_i = k_j = k_l = k\}$
  $P(A_i \cap A_j \cap A_l) = \frac{10^2}{10^5} = \frac{1}{1000}$
  $P(A_i \cap A_j \cap A_l) = \frac{1}{1000} = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_l) \Rightarrow A_1, \ldots, A_5$ są trójkami niezależne.

  $\forall_{i,j,l,m \text{ różnych}} \quad A_i \cap A_j \cap A_l \cap A_m = \{(k_1, \ldots, k_5) \in \Omega : k_i = k_j = k_l = k_m = k\}$
  $P(A_i \cap A_j \cap A_l \cap A_m) = \frac{10^1}{10^5} = \frac{1}{10000}$
  $P(A_i \cap A_j \cap A_l \cap A_m) = \frac{1}{10000} = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_l) \cdot P(A_m) \Rightarrow A_1, \ldots, A_5$ są czwórkami niezależne.

  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{(k_1, \ldots, k_5) \in \Omega : k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k\}$
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{10^0}{10^5} = \frac{1}{100000}$
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{100000} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5)$

  Z powyższych rozważań wynika, że zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 są wzajemnie niezależne.