Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Rozwiązanie zadania 3.1 (e)

Opracowanie: Marcjanna Kabała

Zadanie **3.1**

(e) *Wersja rozszerzona:*

(i) Szansa wygrania nagrody na loterii wynosi 0.1. W loterii uczestniczy 20 grających. Oblicz prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden. Zastosuj schemat Bernoulliego.

(ii) W loterii uczestniczy 20 grających, którzy losują bez zwracania spośród $n = 200$ losów. Wśród losów 10% wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz. Wynik porównaj z wynikiem punktu (i).

(iii) W loterii uczestniczy 20 grających, którzy losują bez zwracania spośród $n = 30$ losów. Wśród losów 10% wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz. Wynik porównaj z wynikiem punktu (i).

Rozwiązanie:

Podpunkt (i):

- Model: schemat Bernoulliego, sukces - wyciągnięcie losu z wygraną, $p = 0.1$, $n = 20$.
- Niech X oznacza liczbę sukcesów w n próbach.
  $P(X = k) = \binom{20}{k}(0.1)^k(1-0.1)^{20-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, 20$.
- Mamy oszacować $P(X \geqslant 1)$.
  $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) =$
  $= 1 - \binom{20}{0}(0.1)^0(1-0.1)^{20-0} = 1 - (0.9)^{20} \approx 0.8784$
- Zatem prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz, wynosi **0.8784**.

Podpunkt (ii):

- $\Omega = \{\{l_1, l_2, \ldots, l_{20}\}$, gdzie l_i to różne losy spośród 200 możliwych losów, wśród których tylko 10% wygrywa$\}$.
  $F = 2^\Omega$, P- prawodpodobieństwo klasyczne.
- $A = \{\{l_1, l_2, \ldots, l_{20}\} \in \Omega$, gdzie wśród l_i jest przynajmniej 1 los wygrywający, tzn. co najmniej 1 gracz wygra$\}$.

  Zauważmy, że
  $A^c = \{\{l_1, l_2, \ldots, l_{20}\} \in \Omega$, gdzie wśród l_i brak losu wygrywającego, tzn. nikt nie wygra $\}$.
- Z tego, że 10% z 200 losów (czyli $0.1 \cdot 200 = 20$) wygrywa, wynika, że $200 - 20 = 180$ losów przegrywa.
- $\#\Omega = \binom{200}{20} \approx 1.6136 \cdot 10^{27}$
- $\#A^c = \binom{180}{20} \approx 1.7514 \cdot 10^{26}$
- Zatem prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz, wynosi:
  $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} \approx 1 - 0.1086 = \mathbf{0.8914}$.

- Wnioski: Dla dużej ilości losów w porównaniu do liczby graczy prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz, jest zbliżone do prawdopodobieństwa tego zdarzenia obliczonego przy zastosowaniu schematu Bernoulliego.

Podpunkt (iii):

- $\Omega = \{\{l_1, l_2, \ldots, l_{20}\}$, gdzie l_i to różne losy sposród 30 możliwych losów, wśród których tylko 10% wygrywa$\}$. $F = 2^{\Omega}$, P- prawodpodobieństwo klasyczne.

- $A = \{\{l_1, l_2, \ldots, l_{20}\} \in \Omega$, gdzie wśród l_i jest przynajmniej 1 los wygrywający, tzn. co najmniej 1 gracz wygra$\}$.

  Zauważmy, że
  $A^c = \{\{l_1, l_2, \ldots, l_{20}\} \in \Omega$, gdzie wśród l_i brak losu wygrywającego, tzn. nikt nie wygra $\}$.

- Z tego, że 10% z 30 losów (czyli $0.1 \cdot 30 = 3$) wygrywa, wynika, że $30 - 3 = 27$ losów przegrywa.

- $\#\Omega = \binom{30}{20} = 30045015$.

- $\#A^c = \binom{27}{20} = 888030$.

- Zatem prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz, wynosi:
  $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} \approx 1 - 0.0295 = \mathbf{0.9705}$.

- Wnioski: Dla małej ilości losów w porównaniu do liczby graczy prawdopodobieństwo, że wygra co najmniej jeden gracz, odbiega od prawdopobieństwa tego zdarzenia obliczonego przy zastosowaniu schematu Bernoulliego. Ponadto prawdopodobieństwa, że wygra co najmniej jeden gracz, jest bliskie 1 dla takiej ilości losów.