

Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 4. Rozwiązanie zadania 4.3 (b) - wersja rozszerzona

Opracowanie: Klaudia Kotwica

Zadanie **4.3**

- (b) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja $F(x) = \begin{cases} Ax^2 & \text{dla } x \leq -1, \\ x + B & \text{dla } -1 < x \leq -0,5, \\ 1 & \text{dla } x > -0,5 \end{cases}$ była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X . Oblicz $P(-0,75 < X < 0)$. Sprawdź, czy to możliwe, aby $P(-0,75 < X < 0) = 0.0625$.

Rozwiązanie:

F będzie dystrybuantą wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. będzie lewostronnie ciągła;
2. będzie niemalejąca na \mathbb{R} ;
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

ad.1 Warunek spełniony $\forall A, B \in \mathbb{R}$, ponieważ F jest zadana funkcjami elementarnymi na przedziałach prawostronnie domkniętych.

ad.3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} Ax^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$ oraz $B \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \text{ dla dowolnych } A \text{ i } B$$

ad.2 Warunek ten sprawdzamy tylko dla $A = 0$, to znaczy sprawdzamy kiedy funkcja

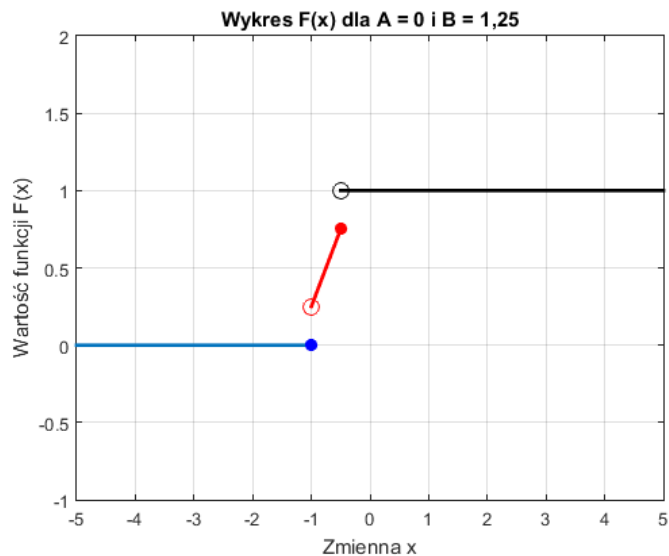
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -1, \\ x + B & \text{dla } -1 < x \leq -0,5, \\ 1 & \text{dla } x > -0,5 \end{cases}$$

jest niemalejąca na \mathbb{R} .

- F jest stała na przedziałach $(-\infty, -1)$ oraz $(-0.5, +\infty)$ $\forall B \in \mathbb{R}$
- Dla $x \in (-1, -0.5)$ pochodna $F'(x) = (x+B)' = 1 > 0 \Rightarrow F$ jest rosnąca na $(-1, -0.5)$ $\forall B \in \mathbb{R}$
- $F(-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = B - 1$ i $F(-1) \leq \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) \Leftrightarrow 0 \leq B - 1 \Rightarrow B \geq 1$
- $F(-0.5) = B - 0.5$, $\lim_{x \rightarrow -0.5^+} F(x) = 1$ i $F(-0.5) \leq \lim_{x \rightarrow -0.5^+} F(x) \Leftrightarrow B - 0.5 \leq 1 \Rightarrow B \leq 1.5$

Zatem, F jest niemalejąca na $\mathbb{R} \Leftrightarrow 1 \leq B \leq 1.5$.

WNIOSEK: Funkcja F jest dystrybuantą $\Leftrightarrow A = 0$ oraz $1 \leq B \leq 1.5$.



Dla wyliczonych stałych A i B liczymy $P(-0.75 < X < 0)$.

$$P(-0.75 < X < 0) = F(0) - \lim_{x \rightarrow -0.75^+} F(x) = 1 - (B - 0.75) = 1.75 - B$$

Sprawdzamy, czy można dobrać stałą B tak, aby $P(-0.75 < X < 0) = 0.0625$.

$$1.75 - B = 0.0625 \Leftrightarrow B = 1.6875 > 1.5$$

WNIOSEK: Nie można dobrać stałej B tak, aby $P(-0.75 < X < 0) = 0.0625$, ponieważ B musiałoby być wtedy większe od 1.5, a dla takiego B funkcja F nie jest dystrybuantą.