Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Rozwiązanie zadania 5.1 (b)

Opracowanie: Anna Kasprzak

Zadanie **5.1**

(b) Niech $x_n = a + \dfrac{1}{n}$ oraz $p_n = b\dfrac{n}{(n+1)!}$. Wyznacz dla jakich wartości stałych $a \in \mathbb{N}$ i b ciąg $\{(x_n, p_n), n = 1, 2, 3, \ldots\}$ określa rozkład pewnej dyskretnej zmiennej losowej X. Następnie dla parametrów z wyznaczonego zakresu oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna ta jest większa od 6.3 i mniejsza od 7.25.

Rozwiązanie:

- Ciąg $\{x_n\}$ jest różnowartościowy $\forall_{a\in\mathbb{N},\, b\in\mathbb{R}}$.
- $p_n = b\frac{n}{(n+1)!} \geqslant 0\, \forall_n \Leftrightarrow b \geqslant 0$ i $a \in \mathbb{N}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = b\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = b\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = b\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}) = b\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}) =$
  $= b\lim\limits_{N\to\infty}(1 - \frac{1}{(N+1)!}) = 1 \;\Leftrightarrow\; b = 1$ i $a \in \mathbb{N}$.
- Ciąg $\{(x_n, p_n)\}$ określa rozkład dyskretnej zmiennej losowej X $\Leftrightarrow$ $a \in \mathbb{N}$ i $b = 1$.
- $p_n = P(X = x_n)$.
- Dla $a \notin \{6, 7\}$,
  $P(6.3 < X < 7.25) = 0.$
- Dla $a = 6$,
  $P(6.3 < X < 7.25) = P(X = 7 = x_1) + P(X = 6\frac{1}{2} = x_2) + P(X = 6\frac{1}{3} = x_3) = p_1 + p_2 + p_3 =$
  $= \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{24} = \frac{23}{24} \approx 0.9583.$
- Dla $a = 7$,
  $P(6.3 < X < 7.25) = P(X < 7.25) = 1 - P(X \geqslant 7.25) =$
  $= 1 - P(X = 8 = x_1) - P(X = 7\frac{1}{2} = x_2) - P(X = 7\frac{1}{3} = x_3) - P(X = 7\frac{1}{4} = x_4) =$
  $= 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 = 1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - \frac{4}{5!} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{6} - \frac{3}{24} - \frac{4}{120} = \frac{1}{120} \approx 0.00833.$
- Podsumowując:

$$P(6.3 < X < 7.25) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \neq 6 \wedge a \neq 7 \\ \sum\limits_{n=1}^{3} p_n = \frac{23}{24} & \text{dla } a = 6 \\ \sum\limits_{n=5}^{\infty} p_n = 1 - \sum\limits_{n=1}^{4} p_n = \frac{1}{120} & \text{dla } a = 7 \end{cases}.$$