Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Rozwiązanie zadania 5.2 (b)

Opracowanie: Tomasz Trzeciak

Zadanie **5.2**

(b) Czy można dobrać stałe a, b tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{dla } x \in [a,b] \end{cases}$ była gęstością pewnego rozkładu probabilistycznego? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:
Z własności funkcji wiemy, że:

(I) $a \leqslant b$

(II) $ab > 0$, ponieważ przedział $[a,b]$ nie może zawierać 0.

Ponadto: Funkcja $f(x)$ jest gęstością rozkładu probabilistycznego wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia dwa warunki:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2. $\forall_x f(x) \geqslant 0$

Ad 2.

Dla $x \notin [a,b]$: $f(x)$ jest równe 0, a więc warunek 2. jest spełniony.
Dla $x \in [a,b]$: $f(x) = \frac{1}{|x|} > 0$, $\forall_x$, a więc warunek 2. jest spełniony.

Ad.1.

Gdy $a > 0$:

$$\int_a^b \frac{1}{|x|}dx = \int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a| = \ln\left|\frac{b}{a}\right| = \ln\frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = e \Leftrightarrow b = ae$$

(zauważmy, że $b = ae > a$, gdy $a > 0$.)

Gdy $a < 0$:

$$\int_a^b \frac{1}{|x|}dx = -\int_a^b \frac{1}{x}dx = -\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = e \Leftrightarrow b = \frac{a}{e}$$

(zauważmy, że $b = \frac{a}{e} > a$, gdy $a < 0$.)

Odpowiedź: $f(x)$ jest gęstością $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = e \cdot a \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ b = \frac{a}{e} \end{cases}$