Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Rozwiązanie zadania 5.4 (a)

Opracowanie: Maciej Małecki

Zadanie **5.4**

(a) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ A + B\arcsin(x), & \text{gdy } -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1, & \text{gdy } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym. Wyznacz gęstość $f(x)$ tego rozkładu.

Rozwiązanie:

Funkcja F jest dystrybuantą rozkładu ciągłego, gdy spełnia 3 warunki konieczne (I, II, III) i 1 dostateczny (IV):

I. F jest ciągła na $\mathbb{R}$;

II. F jest niemalejąca na $\mathbb{R}$;

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;

IV. F' istnieje poza (co najwyżej) skończoną liczbą punktów;

Ad III

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \quad \bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}}$$

Ad I

Funkcja F jest ciągła na przedziałach $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ oraz na $(\frac{1}{2}, \infty)$, i jest lewostronnie ciągła w $-\frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{2}$ jako funkcja zadana funkcjami elementarnymi na przedziałach domkniętych prawostronnie. Zatem funkcja F jest ciągła na $\mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

Funkcja F jest ciągła prawostronnie w $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = F(-\frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} F(x) = A - B(\frac{\pi}{6}) \\ A + B(\frac{\pi}{6}) = F(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} F(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{\pi} \end{cases}$$

Ad II

Dla $A = \frac{1}{2}$ i $B = \frac{3}{\pi}$ funkcja F jest niemalejąca na całej prostej, bo:

- jest stała na $(-\infty, -\frac{1}{2})$ oraz na $(\frac{1}{2}, \infty)$;
- $F'(x) = \frac{3}{\pi\sqrt{1-x^2}} > 0$ dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
- F jest ciągła w punktach $-\frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{2}$

Ad IV

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{gdy } |x| < \frac{1}{2} \\ ? & \text{gdy } |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{gdy } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Funkcja F jest funkcją różniczkowalną, być może poza punktami $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$.

Wniosek: Funkcja F jest dystrybuantą rozkładu ciągłego $\Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$ oraz $B = \frac{3}{\pi}$.

Gęstość tego rozkładu ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{gdy } |x| \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{gdy } |x| = \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{gdy } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{gdy } |x| \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$