Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 5. Rozwiązanie zadania 5.4 (b)

Opracowanie: Maciej Małecki

Zadanie **5.4**

(b) Dobierz stałe A i B tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \leqslant 0; \\ A - \frac{B}{1+x^2}, & \text{gdy } x > 0; \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym. Wyznacz gęstość $f(x)$ tego rozkładu.

Rozwiązanie:

Funkcja F jest dystrybuantą rozkładu ciągłego, gdy spełnia 3 warunki konieczne (I, II, III) i 1 dostateczny (IV):

I. F jest ciągła na R;

II. F jest niemalejąca na R;

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;

IV. F' istnieje poza (co najwyżej) skończoną liczbą punktów;

Ad III

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left(A - \frac{B}{1+x^2}\right) = 1 \Leftrightarrow A = 1$$

Ad I

Funkcja F jest ciągła na przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$, i jest lewostronnie ciągła w punkcie 0 jako funkcja zadana funkcjami elementarnymi na przedziałach domkniętych prawostronnie. Zatem funkcja F (dla $A = 1$) jest ciągła na $\mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

Funkcja F jest prawostronnie ciągła w 0

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = F(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to0^+}\left(1 - \frac{B}{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow B = 1$$

Ad II

Dla $A = 1$ i $B = 1$ funkcja F jest niemalejąca na całej prostej, bo:

- jest stała na $(-\infty, 0)$;
- $F'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0$ dla $x \in (0, \infty)$
- F jest ciągła w punkcie 0

Ad IV

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0 \\ ? & \text{dla } x = 0 \\ \frac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Funkcja F jest funkcją różniczkowalną, być może poza punktem 0.

Wniosek: Funkcja F jest dystrybuantą rozkładu ciągłego $\Leftrightarrow A = 1$ oraz $B = 1$

Gęstość tego rozkładu ma zatem postać:

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leqslant 0 \end{cases}$$