Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Listy 5 i 6. Rozwiązanie zadania 5.2/6.2 - dodatkowy podpunkt (c)

Opracowanie: Alicja Kaszuba

Zadanie **5.2/6.2**

(c) Dobierz stałą A tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} A\sqrt{x} & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$ była gęstością rozkładu pewnej zmiennej losowej X. Oblicz następnie $\mathrm{E}X^k$ dla $k > 0$ oraz D^2X.

Rozwiązanie:

Pierwsza część:
Zaczniemy od dobrania stałej A. Funkcja $f(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia poniższe warunki: 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ oraz 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Ad.1) Gdy $x \in (0, 1)$, $\quad f(x) = A\sqrt{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow A \geqslant 0$.
Dla pozostałych wartości x funkcja $f(x) = 0$ spełnia warunek $\forall A$.
Zatem warunek 1) zachodzi $\Leftrightarrow A \geqslant 0$.

Ad.2)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} A\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = A \cdot \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{2A}{3} \cdot 1 - 0 = \frac{2A}{3} = 1 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Wniosek: Warunki 1) i 2) są spełnione $\Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$.

Dalej będziemy prowadzić obliczenia dla f z $A = \frac{3}{2}$, czyli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Druga część

Musimy obliczyć moment rzędu $k > 0$ zmiennej losowej X, czyli wartość oczekiwaną jej k-tej potęgi. (Zauważmy, że $P(X \geqslant 0) = 1$, więc X^k jest dobrze określone dla dowolnego $k > 0$.) Jeśli znamy gęstość zmiennej losowej X, to wartość oczekiwaną zmiennej losowej X^k możemy obliczyć ze wzoru $m_k = \mathrm{E}X^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$. Otrzymujemy:

$$m_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int\limits_{0}^{1} x^k\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int\limits_{0}^{1} x^{k+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \overset{k \geq 0}{=} \frac{3}{2} \cdot \left.\frac{x^{k+\frac{3}{2}}}{k+\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k+\frac{3}{2}} = \frac{3}{2k+3}.$$

Trzecia część

Wariancja zmiennej losowej X to $\mathrm{D}^2X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = m_2 - m_1^2$.
Z otrzymanego w części drugiej wzoru mamy

$$m_1 = \frac{3}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{3}{5}, \quad m_2 = \frac{3}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{3}{7},$$

a stąd

$$\mathrm{D}^2X = \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{75 - 63}{7 \cdot 25} = \frac{12}{175} \approx 0.07.$$