

Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 6. Rozwiązanie zadania 6.3 (c)

Opracowanie: Malwina Olejniczak

Zadanie **6.3**

(c) Bok sześcianu B ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(2.9, 3.1)$ cm. Sześcian wykonano z żelaza o gęstości 7.88 g/cm^3 . Wyznacz rozkład masy M tego sześcianu.

Rozwiązanie:

Masa sześcianu (w [g]) równa jest $M = B^3 d$, gdzie $d = 7.88 \text{ [g/cm}^3]$.

Gęstość zmiennej losowej B ma postać: $f_B(b) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } b \notin [2.9; 3.1], \\ \frac{1}{3.1-2.9} = 5, & \text{gdy } b \in [2.9; 3.1]. \end{cases}$

Dystrybuanta zmiennej losowej M ma postać

$$F_M(m) = P(M < m) = P(B^3 d < m) = P(B < (\frac{m}{d})^{1/3}) = F_B((\frac{m}{d})^{1/3}),$$

gdzie $F_B(b)$ to dystrybuanta rozkładu B .

I sposób:

$$F'_B(b) = \begin{cases} f_B(b), & \text{gdy } b \neq 2.9 \wedge b \neq 3.1, \\ \text{nie istnieje,} & \text{gdy } b = 2.9 \vee b = 3.1. \end{cases}$$

Ponadto F_B jest funkcją ciągłą na \mathbb{R} . Zatem F_M też jest funkcją ciągłą oraz

$$F'_M(m) = \begin{cases} F'_B((\frac{m}{d})^{1/3})((\frac{m}{d})^{1/3})' = f_B((\frac{m}{d})^{1/3})d^{-1/3} \frac{1}{3} m^{-2/3}, & \text{gdy } m \neq 0 \wedge (\frac{m}{d})^{1/3} \neq 2.9 \wedge (\frac{m}{d})^{1/3} \neq 3.1, \\ ? & \text{gdy } m = 0 \vee (\frac{m}{d})^{1/3} = 2.9 \vee (\frac{m}{d})^{1/3} = 3.1. \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$F'_M(m) = \begin{cases} \frac{5}{3d^{1/3}} m^{-2/3}, & \text{gdy } 2.9 < (\frac{m}{d})^{1/3} < 3.1, \\ 0, & \text{gdy } (\frac{m}{d})^{1/3} > 3.1 \vee ((\frac{m}{d})^{1/3} < 2.9 \wedge m \neq 0) \\ ? & m = 0 \vee (\frac{m}{d})^{1/3} = 2.9 \vee (\frac{m}{d})^{1/3} = 3.1. \end{cases}$$

Zatem M ma rozkład ciągły o gęstości $f_M(m) = \begin{cases} \frac{5}{3d^{1/3}} m^{-2/3}, & \text{gdy } m \in [m_1, m_2], \\ 0, & \text{gdy } m \notin [m_1, m_2], \end{cases}$

gdzie $m_1 = 2.9^3 \cdot 7.88 \approx 192.2 \text{ [g]}$, $m_2 = 3.1^3 \cdot 7.88 \approx 234.7 \text{ [g]}$.

II sposób:

$$F_B(b) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } b \leq 2.9, \\ 5(b - 2.9), & \text{gdy } 2.9 < b \leq 3.1, \\ 1, & \text{gdy } b > 3.1. \end{cases}$$

Stąd

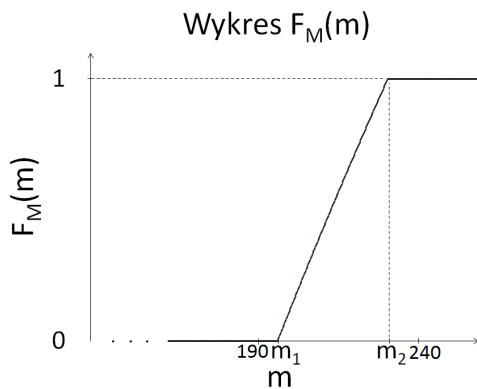
$$F_M(m) = F_B\left(\left(\frac{m}{d}\right)^{1/3}\right) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \left(\frac{m}{d}\right)^{1/3} \leq 2.9, \\ 5\left(\left(\frac{m}{d}\right)^{1/3} - 2.9\right), & \text{gdy } 2.9 < \left(\frac{m}{d}\right)^{1/3} \leq 3.1, \\ 1, & \text{gdy } \left(\frac{m}{d}\right)^{1/3} > 3.1, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } m \leq m_1, \\ 5\left(\left(\frac{m}{d}\right)^{1/3} - 2.9\right), & \text{gdy } m_1 < m \leq m_2, \\ 1, & \text{gdy } m > m_2, \end{cases}$$

gdzie $m_1 = 2.9^3 \cdot 7.88 \approx 192.2$ [g], $m_2 = 3.1^3 \cdot 7.88 \approx 234.7$ [g].

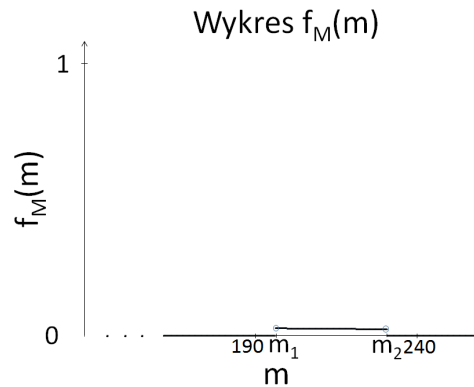
F_M jest funkcją ciągłą oraz

$$F'_M(m) = \begin{cases} \frac{5}{3d^{1/3}}m^{-2/3}, & \text{gdy } m_1 < m < m_2, \\ 0, & \text{gdy } m < m_1 \vee m > m_2, \\ ? & \text{gdy } m = m_1 \vee m = m_2. \end{cases}$$

Zatem M ma rozkład ciągły gęstości $f_M(m) = \begin{cases} \frac{5}{3d^{1/3}}m^{-2/3}, & \text{gdy } m \in [m_1, m_2], \\ 0, & \text{gdy } m \notin [m_1, m_2], \end{cases}$



(a)



(b)

Rysunek 1: Wykresy dystrybuanty i gęstości rozkładu zmiennej losowej M (w [g]).