Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 6. Rozwiązanie zadania 6.3/6.4 - dodatkowy podpunkt (f)

Opracowanie: Wojciech Korczyński

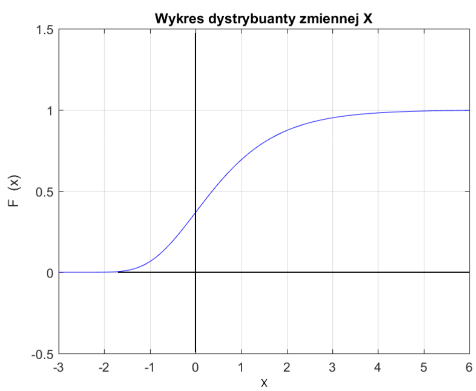
Zadanie **6.3/6.4**

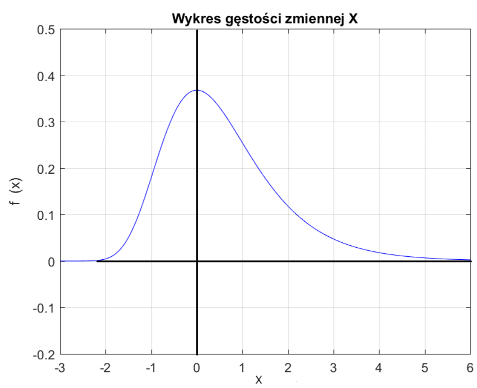
(f) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie określonym dystrybuantą $F(x) = e^{-e^{-x}}$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$. Wylicz - o ile to możliwe - wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X i zmiennej losowej Y.

Rozwiązanie:

- X - zmienna losowa o rozkładzie określonym dystrybuantą $F(x) = e^{-e^{-x}}$. Dystrybuanta $F(x)$ jest ciągła i różniczkowalna na $\mathbb{R}$, zatem X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x) = F'(x) = \left(e^{-e^{-x}}\right)' = e^{-x}\, e^{-e^{-x}} = e^{-x-e^{-x}}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$





- Dystrybuanta zmiennej losowej $Y = X^2$ ma postać

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0 \\ P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}), & \text{gdy } y > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0 \\ F(\sqrt{y}) - \lim_{x \to -\sqrt{y}-} F(x), & \text{gdy } y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant 0 \\ e^{-e^{-\sqrt{y}}} - e^{-e^{\sqrt{y}}}, & \text{gdy } y > 0 \end{cases}$$

F_Y jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$.

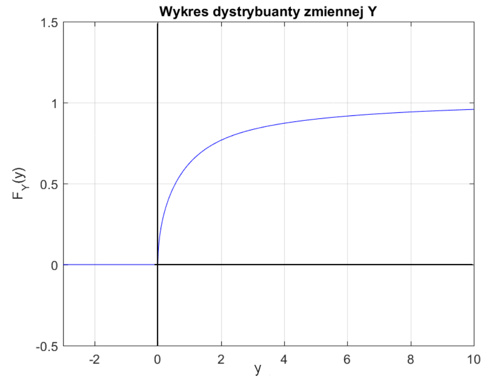
Dla $y < 0$ $\quad F'_Y(y) = 0$.

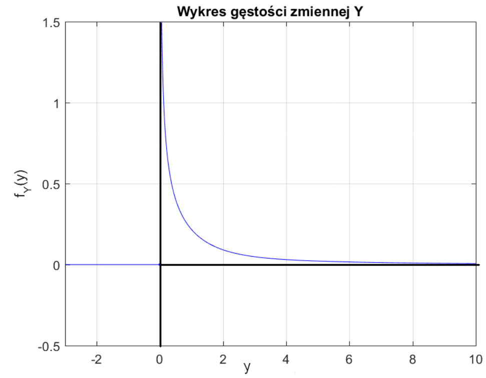
Dla $y > 0$ $\quad F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\, e^{-\sqrt{y}}\, e^{-e^{-\sqrt{y}}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\, e^{\sqrt{y}}\, e^{-e^{\sqrt{y}}}$.

Dla $y = 0$ $\quad F'_Y(y)$ być może istnieje.

$F_Y(y)$ jest zatem funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$ i różniczkowalną, być może poza punktem 0. Stąd wynika, że Y ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_Y(y) = \begin{cases} F'_Y(y) & \text{dla}\, y \neq 0 \\ 0 & \text{dla}\, y = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } y \leqslant 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(e^{-\sqrt{y}}\, e^{-e^{-\sqrt{y}}} + e^{\sqrt{y}}\, e^{-e^{\sqrt{y}}}\right) & \text{gdy } y > 0. \end{cases}$$





- Wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi $\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x-e^{-x}} dx.$ Należy sprawdzić, czy ta całka jest zbieżna.

1. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{x\, e^{-x-e^{-x}}}{x\, e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-e^{-x}} = 1$

   (b) Całka $\int_0^{\infty} x\, e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{2-1}\, e^{-x} dx$ jest wartością funkcji gamma, której ogólny wzór ma postać
   $$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}\, e^{-x} dx$$
   i jest uogólnieniem silni. Dla n całkowitych dodatnich zachodzi bowiem
   $$\Gamma(n) = (n-1)!\ .$$
   Zatem całka $\int_0^{\infty} x\, e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{2-1}\, e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1! = 1$ jest zbieżna.

   Z (a) i (b) oraz kryterium ilorazowego zbieżności całek niewłaściwych wynika, że całka $\int_0^{\infty} x\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

2.
$$\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x}\, e^{-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x\, \left(e^{-e^{-x}}\right)' dx = x\, e^{-e^{-x}}\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{-e^{-x}} dx =$$
$$= 0 \cdot e^{-e^{0}} - \lim_{x\to-\infty} x\, e^{-e^{-x}} - \int_{-\infty}^{0} e^{-e^{-x}} dx = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{e^{-x}}} - \int_{-\infty}^{0} e^{-e^{-x}} dx \overset{H}{=}$$
$$\overset{H}{=} -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}\, e^{e^{-x}}} - \int_{-\infty}^{0} e^{-e^{-x}} dx = 0 - \int_{-\infty}^{0} e^{-e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{-x = y} \\ \multicolumn{3}{c}{-dx = dy} \\ x & -\infty & 0 \\ \hline y & \infty & 0 \end{array} \right| = \int_{\infty}^{0} e^{-e^{y}} dy =$$
$$= -\int_0^{\infty} e^{-e^{y}} dy$$

(a) Dla każdego $y > 0 \quad e^{y} > y$, więc $0 \leqslant e^{-e^{y}} < e^{-y}$.

(b) Całka $\int_0^{\infty} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} y^{1-1}\, e^{-y} dy = \Gamma(1) = 0! = 1$ jest zbieżna.

Z (a) i (b) oraz kryterium porównawczego wynika, że całka $\int_0^{\infty} e^{-e^{-y}} dy$ jest zbieżna.

Zatem całka $\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

Z 1. i 2. wynika, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna, a w konsekwencji EX istnieje.

Jej przybliżoną wartość można uzyskać używając WolframAlpha:

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x-e^{-x}} dx + \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x-e^{-x}} dx \approx -0.219384 + 0.7966 = 0.577216$$

- Wariancja zmiennej losowej X wynosi

$$\mathrm{D}^2X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x) dx - (\mathrm{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx - (\mathrm{E}X)^2 .$$

Należy sprawdzić, czy całka $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

1. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{x^2\, e^{-x-e^{-x}}}{x^2\, e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-e^{-x}} = 1$

   (b) Całka $\int_0^{\infty} x^2\, e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{3-1}\, e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2! = 2$ jest zbieżna.

   Z (a) i (b) oraz kryterium ilorazowego wynika, że całka $\int_0^{\infty} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

2.

$$\int_{-\infty}^{0} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\, e^{-x}\, e^{-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x^2\, \left(e^{-e^{-x}}\right)' dx = x^2\, e^{-e^{-x}}\Big|_{-\infty}^{0} - 2\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-e^{-x}} dx =$$

$$= 0 \cdot e^{-e^{0}} - \lim_{x\to-\infty} x^2\, e^{-e^{-x}} - 2\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-e^{-x}} dx = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{e^{-x}}} - 2\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-e^{-x}} dx \stackrel{H}{=}$$

$$\stackrel{H}{=} -2\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-e^{-x+e^{-x}}} - 2\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-e^{-x}} dx \stackrel{H}{=} -2\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(e^{-x}+1)e^{e^{-x}-x}} - 2\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-e^{-x}} dx =$$

$$= 0 - 2\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{c} -x = y \\ -dx = dy \\ \begin{array}{c|c|c} x & -\infty & 0 \\ \hline y & \infty & 0 \end{array} \end{array} \right| = -2\int_{\infty}^{0} y\, e^{-e^{y}} dy = 2\int_{0}^{\infty} y\, e^{-e^{y}} dy$$

   (a) Dla każdego $y > 0 \quad e^y > y$, więc $0 \leqslant e^{-e^{y}} < e^{-y}$, a stąd $0 \leqslant y\, e^{-e^{y}} < y\, e^{-y}$.

   (b) Całka $\int_0^{\infty} y\, e^{-y} dy = \int_0^{\infty} y^{2-1}\, e^{-y} dy = \Gamma(2) = 1! = 1$ jest zbieżna.

   Z (a) i (b) oraz kryterium porównawczego wynika, że całka $\int_0^{\infty} y\, e^{-e^{-y}} dy$ jest zbieżna.

   Zatem całka $\int_{-\infty}^{0} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

Z 1. i 2. wynika, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna, a w konsekwencji D^2X istnieje.

Jej przybliżoną wartość można otrzymać używając WolframAlpha:

$$\mathrm{D}^2X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx + \int_{0}^{\infty} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx - (\mathrm{E}X)^2 \approx 0.195686 + 1.78243 - (0.577216)^2 =$$

$$= 1.978116 - 0.333178310656 = 1.644937689344$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej Y to $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}X^2$. Jak pokazaliśmy w poprzednim punkcie, ta wartość oczekiwana istnieje i w przybliżeniu jest równa

$$\mathrm{E}Y = \mathrm{E}X^2 \approx 1.978116.$$

- Wariancja zmiennej losowej Y wynosi

$$\mathrm{D}^2Y = \mathrm{D}^2X^2 = \mathrm{E}X^4 - (\mathrm{E}X^2)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4\, f(x)dx - \left(\mathrm{E}X^2\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx - \left(\mathrm{E}X^2\right)^2.$$

Sprawdzimy, czy całka $\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

1. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{x^4\, e^{-x-e^{-x}}}{x^4\, e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-e^{-x}} = 1$

   (b) Całka $\int_0^{\infty} x^4\, e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{5-1}\, e^{-x} dx = \Gamma(5) = 4! = 24$ jest zbieżna.

   Z (a) i (b) oraz kryterium ilorazowego wynika, że całka $\int_0^{\infty} x^2\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

2.

$$\int_{-\infty}^{0} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x^4\, e^{-x}\, e^{-e^{-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} x^4 \left(e^{-e^{-x}}\right)' dx = x^4\, e^{-e^{-x}}\Big|_{-\infty}^{0} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx =$$

$$= 0 \cdot e^{-e^0} - \lim_{x\to-\infty} x^4\, e^{-e^{-x}} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{e^{e^{-x}}} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} -4\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-e^{-x+e^{-x}}} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx \overset{H}{=} -12\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(e^{-x}+1)e^{e^{-x}-x}} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} -24\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-e^{-x}\cdot e^{e^{-x}-x} + (e^{-x}+1)(-e^{-x}-1)e^{e^{-x}-x}} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx =$$

$$= 24\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{e^{-x}-x}\cdot(e^{-2x}+3e^{-x}+1)} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} 24\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(-e^{-x}-1)e^{e^{-x}-x}(e^{-2x}+3e^{-x}+1) + e^{e^{-x}-x}(-2e^{-2x}-3e^{-x})} - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx =$$

$$= 0 - 4\int_{-\infty}^{0} x^3\, e^{-e^{-x}} dx = \left|\begin{array}{c} -x = y \\ -dx = dy \\ \begin{array}{c|c|c} x & -\infty & 0 \\ \hline y & \infty & 0 \end{array} \end{array}\right| = -4\int_{\infty}^{0} y^3\, e^{-e^{y}} dy = 4\int_{0}^{\infty} y^3\, e^{-e^{y}} dy$$

   (a) Dla każdego $y > 0 \quad e^y > y$, więc $0 \leqslant e^{-e^y} < e^{-y}$, więc $0 \leqslant y^3\, e^{-e^y} < y^3\, e^{-y}$.

   (b) Całka $\int_0^{\infty} y^3\, e^{-y} dy = \int_0^{\infty} y^{4-1}\, e^{-y} dy = \Gamma(4) = 3! = 6$ jest zbieżna.

   Z (a) i (b) oraz kryterium porównawczego wynika, że całka $\int_0^{\infty} y^3\, e^{-e^{-y}} dy$ jest zbieżna.

   Zatem całka $\int_{-\infty}^{0} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna.

Z 1. i 2. wynika, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx$ jest zbieżna. Zatem D^2Y istnieje.

Jej przybliżoną wartość można otrzymać używając WolframAlpha:

$$\mathrm{D}^2Y = \mathrm{E}X^4 - (\mathrm{E}X^2)^2 = \int_{-\infty}^{0} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx + \int_{0}^{\infty} x^4\, e^{-x-e^{-x}} dx - \left(\mathrm{E}X^2\right)^2 \approx 0.265701 + 23.2958 - (1.978116)^2 \approx$$

$$\approx 23.561501 - 3.912942 = 19.648558$$