Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 6. Rozwiązanie zadania 6.5

Opracowanie: Marta Mrozińska

Zadanie **6.5**

(a) Udowodnij nierówność Markowa, podaną na wykładzie.

(b) *(wersja rozszerzona)*
Prawdopodobieństwo wyprodukowania wybrakowanego wiertła wynosi 0.01. Stosując nierówność Markowa oszacuj po ile wierteł należy pakować do pudełek, aby prawdopodobieństwo, że pudełko zawiera co najmniej 50 sztuk dobrych, było nie mniejsze niż 0.95. Poszukaj minimalnej liczby wierteł w pudełku, przy której powyższy warunek jest spełniony.

Rozwiązanie:

Ad (a) **Nierówność Markowa:**
Jeśli zmienna losowa X jest nieujemna z prawdopodobieństwem 1 oraz istnieje $\mathrm{E}X$, to dla każdego $a > 0$ mamy:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}X}{a}.$$

Dowód:
Załóżmy, że zmienna losowa X jest nieujemna z prawdopodobieństwem 1 oraz istnieje $\mathrm{E}X$. Obliczamy wartość oczekiwaną zmiennej losowej X:

$$\mathrm{E}X = \int_\Omega X \,\mathrm{d}P.$$

Wiemy, że $P(X \geqslant 0) = 1$. Wnioskujemy stąd, że dana całka na pewnym podzbiorze Ω jest nie większa niż całka na całym zbiorze Ω:

$$\int_\Omega X \,\mathrm{d}P \geqslant \int_{\{X \geqslant a\}} X \,\mathrm{d}P.$$

Ponieważ dolnym ograniczeniem zbioru, po którym całkujemy jest a, to daną całkę także możemy ograniczyć z dołu:

$$\int_{\{X \geqslant a\}} X \,\mathrm{d}P \geqslant \int_{\{X \geqslant a\}} a \,\mathrm{d}P.$$

Obliczamy otrzymaną całkę:

$$\int_{\{X \geqslant a\}} a \,\mathrm{d}P = a\, P(\{X \geqslant a\}).$$

Podsumowując, otrzymaliśmy nierówność:

$$\mathrm{E}X \geqslant a\, P(\{X \geqslant a\}), \text{ gdzie } a > 0.$$

Po przekształceniu:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}X}{a}. \square$$

Ad (b) **Model: schemat Bernoulliego,** sukces – wyprodukowanie wiertła wybrakowanego, $p = 0.01$, n – liczba prób, czyli liczba wierteł w pudełku.

Zakładamy, że $n \geqslant 50$, bo w przeciwnym przypadku warunki postawione w zadaniu nie mogłyby być spełnione.

Niech X_n oznacza liczbę sukcesów w n próbach, czyli liczbę wierteł wybrakowanych w pudełku. Szukamy takiego n, że:

$$P(n - X_n \geqslant 50) \geqslant 0.95 \Leftrightarrow P(X_n > n - 50) \leqslant 0.05. \tag{1}$$

Z nierówności Markowa otrzymujemy:

$$P(X_n > n - 50) \leqslant P(X_n \geqslant n - 50) \leqslant \frac{\mathrm{E}X_n}{n - 50}.$$

Obliczamy $\mathrm{E}X_n$ korzystając ze wzoru na wartość oczekiwaną w rozkładzie dwumianowym:

$$\mathrm{E}X_n = n \cdot p = 0.01\,n.$$

Podstawiamy i otrzymujemy:

$$P(X_n > n - 50) \leqslant \frac{0.01\,n}{n - 50}.$$

Zatem, jeżeli $\frac{0.01\,n}{n-50} \leqslant 0.05$, to nierówność (1) jest spełniona. Mamy więc:

$$\begin{gathered} \frac{0.01\,n}{n - 50} \leqslant 0.05; \\ 0.01\,n \leqslant 0.05\,n - 2.5; \\ n \leqslant 5\,n - 250; \\ 4\,n \geqslant 250; \\ n \geqslant 62.5. \end{gathered}$$

Z obliczeń wynika, że nierówność (1) zachodzi, gdy $n \geqslant 63$. Możliwe, że warunki zadania spełnione są dla mniejszej liczby wierteł w pudełku. Sprawdzimy to obliczając prawdopodobieństwo, że liczba wybrakowanych wierteł w pudełku jest większa niż $n - 50$ dla naturalnych n z przedziału $[50, 62]$.

n	**prawdopodobieństwo**	**n**	**prawdopodobieństwo**	**n**	**prawdopodobieństwo**
50	0.395	55	$1.9049 \cdot 10^{-5}$	60	$2.1840 \cdot 10^{-11}$
51	0.0925	56	$1.5099 \cdot 10^{-6}$	61	$1.1066 \cdot 10^{-12}$
52	0.0154	57	$1.0682 \cdot 10^{-7}$	62	$5.2625 \cdot 10^{-14}$
53	0.002	58	$6.8446 \cdot 10^{-9}$		
54	$2.1038 \cdot 10^{-4}$	59	$4.0196 \cdot 10^{-10}$		

Z powyższej tabelki możemy odczytać, że obliczone prawdopodobieństwo jest mniejsze niż 0.05 już dla $n = 52$. Stąd wynika, że najmniejszą liczbą n, dla której warunki zadania są spełnione jest 52.