Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 7. Rozwiązanie zadania 7.2 (a)

Opracowanie: Aleksandra Małecka

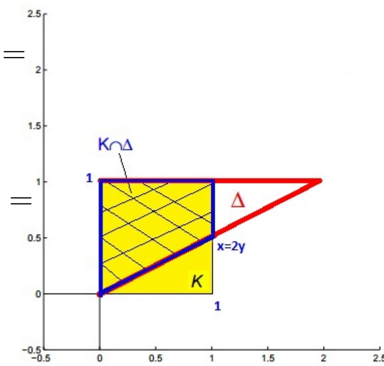
Zadanie **7.2**

(a) Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3(5x+2) & \text{dla } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$ jest gęstością wektora losowego (X,Y). Oblicz $P((X,Y)\in\Delta)$, gdzie Δ to obszar $0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 2y$. Wyznacz rozkłady brzegowe wektora losowego (X,Y). Czy X i Y są niezależne?

Rozwiązanie:

- Oznaczamy przez K kwadrat $0<x<1, 0<y<1$.

$$P((X,Y)\in\Delta) = \iint_\Delta f(x,y)dxdy = \frac{8}{9}\iint_{\Delta\cap K}(5x+2)y^3dxdy = \frac{8}{9}\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^1(5x+2)y^3dy =$$



$$= \frac{8}{9}\int_0^1(5x+2)\left[\frac{1}{4}y^4\right]_{\frac{x}{2}}^1 dx = \frac{8}{9}\int_0^1(5x+2)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{64}x^4\right)dx = \frac{8}{9}\int_0^1\left(\frac{5}{4}x-\frac{5}{64}x^5+\frac{1}{2}-\frac{1}{32}x^4\right)dx =$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{5}{2\cdot 4}x^2-\frac{5}{64\cdot 6}x^6+\frac{1}{2}-\frac{1}{32\cdot 5}x^5\right]_0^1 = \frac{8}{9}\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{384}+\frac{1}{2}-\frac{1}{160}\right) = \frac{8}{9}\left(\frac{2123}{1920}\right) = \frac{2123}{2160} \approx$$

≈ 0.9829

- Rozkłady brzegowe są postaci:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{8}{9}(5x+2)\int_0^1 y^3dy = \frac{8}{9}(5x+2)\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{8}{9}(5x+2)\frac{1}{4} = \frac{2}{9}(5x+2) & \text{dla } 0<x<1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{8}{9}y^3\int_0^1(5x+2)dx = \frac{8}{9}y^3\left[\frac{5}{2}x^2+2x\right]_0^1 = \frac{8}{9}y^3(\frac{5}{2}+2) = \frac{8}{9}y^3\frac{9}{2} = 4y^3 & \text{dla } 0<y<1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } y. \end{cases}$$

- Ponieważ dla każdego (x,y) mamy $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$, więc także:

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)\ \ \forall(x,y),$$

a stąd wynika, że zmienne losowe X i Y są niezależne.