Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 8. Rozwiązanie zadania 8.1/8.2 - dodatkowy podpunkt (e)

Opracowanie: Krzysztof Wnuk

Zadanie **8.1/8.2**

(e) Yamato, pancernik służący w Japońskiej Cesarskiej Marynarce Wojennej w okresie II wojny światowej, wraz z bliźniaczym „Musashi”, były największymi pancernikami, jakie kiedykolwiek zbudowano. Oba miały artylerię główną w postaci dziewięciu dział kalibru 460 mm. Działa te zdolne były strzelać pociskami o wadze ponad 1460 kilogramów, gdzie prawdopodobieństwo że pocisk utknie w dziale i nie zostanie poprawnie wystrzelony wynosiło 0.004. Na postawie przybliżenia Poissona i na podstawie twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a oszacuj prawdopodobieństwa:
a) utknięcia pocisku w armacie mniej niż 3 razy na 500 wystrzałów;
b) zatarcia się armaty (więcej niż 5 wadliwych wystrzałów) przy 1000 wystrzałów.
Oszacuj błędy przybliżenia. Porównaj otrzymane wyniki.

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces - pocisk utknął w dziale i nie został poprawnie wystrzelony, $p = 0.004$. Ilość prób, czyli wystrzałów to $n = 500$. S_n to liczba sukcesów w n próbach, czyli liczba wadliwych wystrzałów wśród wszystkich n wykonanych.
- Mamy oszacować:
  a) $P(S_n < 3)$
  b) $P(S_n \geqslant 5)$
- $n = 500 > 50$, $p = 0.004 < 0.1$ oraz $np = 2 < 10$, zatem uzasadnione jest skorzystanie z metody przybliżenia Poissona. Otrzymujemy
  a) $P(S_n < 3) = P(S_n = 0) + P(S_n = 1) + P(S_n = 2) \approx p_0 + p_1 + p_2 =$
  $= 0.1353 + 0.2707 + 0.2707 = 0.6762$,
  b) $P(S_n \geqslant 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(S_n = k) \approx 1 - \sum_{k=0}^{4} p_k =$
  $= 1 - 0.1353 - 0.2707 - 0.2707 - 0.1804 - 0.0902 = 0.0527$,

  gdzie p_k są odczytane z tablic rozkładu Poissona z $\lambda = np = 500 \cdot 0.004 = 2$.
  Błąd przybliżenia nie przekracza $np^2 = 0.008$.
- $n = 500$ jest dość duże, więc możemy także użyć metody przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a. Otrzymujemy
  a) $P(S_n < 3) \approx \phi\left(\frac{3-0.5-500\cdot 0.004}{\sqrt{500\cdot 0.004(1-0.004)}}\right) = \phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{1.992}}\right) \approx \phi(0.35) = 0.6368$,
  b) $P(S_n \geqslant 5) \approx 1 - \phi\left(\frac{5-0.5-500\cdot 0.004}{\sqrt{500\cdot 0.004(1-0.004)}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{2.5}{\sqrt{1.992}}\right) \approx 1 - \phi(1.77) =$
  $= 1 - 0.9616 = 0.0384$

  z tablic standardowego rozkładu normalnego.

  Błąd przybliżenia nie przekracza $\frac{0.004^2+(1-0.004)^2}{2\sqrt{0.004(1-0.004)}\sqrt{500}} \approx 0.3514$
- Porównanie otrzymanych przybliżonych wartości prawdopodobieństwa, że:

a) pocisk utknie w armacie mniej niż 3 razy na 500 wystrzałów.

z tw. Poissona	z tw. Moivre'a-Laplace'a
0.6762 ± 0.008	0.6368 ± 0.3514

b) armata ulegnie zatarciu przy 1000 wystrzałach

z tw. Poissona	z tw. Moivre'a-Laplace'a
0.0527 ± 0.008	0.0384 ± 0.3514

Bardziej wiarygodne są wyniki otrzymane na podstawie przybliżenia Poissona.