

Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 8. Rozwiązanie zadania 8.2 (b)

Opracowanie: Katarzyna Kalkowska

Zadanie 8.2

(b) Jeśli gracz wyrzuci kostką 6 oczek, to wygrywa 4 zł. Jeśli nie, przegrywa 1 zł. Oszacuj prawdopodobieństwo tego, że w 1000 rzutach gracz przegra co najwyżej 20 zł. Oszacuj też błąd przybliżenia.

Rozwiązanie:

Model: schemat Bernoulliego, sukces - wyrzucenie kostką 6 oczek, $p = \frac{1}{6}$, $n = 1000 = 10^3$,

S_n to liczba sukcesów w n próbach, czyli liczba rzutów kostką z wynikiem: 6 oczek

Wynik gry W w zł wynosi: $W = S_n \cdot 4 - (n - S_n) \cdot 1$

Mamy oszacować $P(W \geq -20) = P(S_n \geq 196)$.

Przy dużym $n = 10^3$ możemy użyć przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a:

$$P(S_n < k) \approx \Phi \left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}} \right),$$

gdzie Φ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego. Otrzymujemy:

$$P(S_n \geq 196) = 1 - P(S_n < 196) \approx 1 - \Phi \left(\frac{196 - 0.5 - 10^3 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{10^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})}} \right) \approx 1 - \Phi(2.45) = 1 - 0.9929 = 0.0071$$

$$\text{Błąd przybliżenia nie przekracza } \frac{(\frac{1}{6})^2 + (1 - \frac{1}{6})^2}{2\sqrt{10^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})}} = \frac{\frac{26}{36}}{2\sqrt{10^3 \cdot \frac{5}{36}}} = \frac{13}{6 \cdot 50\sqrt{2}} \approx 0.031$$

Odp.: Prawdopodobieństwo, że gracz przegra co najwyżej 20 zł, wynosi 0.0071 ± 0.031 .