Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 8. Rozwiązanie zadania 8.2 - dodatkowy podpunkt (e)

Opracowanie: Mateusz Baryła

Zadanie **8.2**

(e) Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy jednym wystrzale wynosi 0.7. Ile razy należy strzelić, aby z prawdopodobieństwem większym niż 0.96 można było orzec, że odchylenie częstości trafienia do celu od prawdopodobieństwa tego zdarzenia będzie mniejsze niż 0.01? Zastosować twierdzenie Moivre'a-Laplace'a.

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces to trafienie do celu
  $p = 0.7$, n to liczba strzałów
  S_n to liczba sukcesów w n próbach, czyli liczba trafień

  Szukamy takiego n, żeby

$$L_n = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0.01\right) > 0.96. \tag{1}$$

- Rozpiszmy lewą stronę nierówności (1) opuszczając moduł

$$L_n = P\left(-0.01 < \frac{S_n}{n} - p < 0.01\right).$$

- Podzielmy strony nierówności przez $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$$L_n = P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{\frac{S_n - np}{n}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{np(1-p)}{n}}}\right). \tag{2}$$

- Wstawiając dane z zadania do wzoru (2) lewa strona przyjmuje postać

$$L_n = P\left(-0.01\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0.7 \cdot 0.3}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < 0.01\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{0.7 \cdot 0.3}}\right).$$

- Wiedząc, że rozkład Bernoulliego możemy przybliżyć rozkładem normalnym (tw. Moivre'a-Laplace'a), mamy

$$L_n \approx \Phi(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}) - \Phi(\frac{-\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}\right) - 1. \tag{3}$$

- Szukamy teraz takiego $n \in \mathbb{N}$, żeby

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}\right) - 1 > 0.96 \tag{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}\right) > 0.98. \tag{5}$$

- Posługując się tablicą statystyczną rozkładu normalnego odczytujemy, że $\Phi(2.06) = 0.98$, a stąd oraz z monotoniczności funkcji Φ (która jest funkcją rosnącą) nierówność (5) jest równoważna nierówności

$$\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}} > 2.06 \tag{6}$$
$$\Updownarrow$$
$$n > (2.06)^2 \cdot 100 \cdot 21 \approx 8911.56 \tag{7}$$

zatem (5) zachodzi $\Leftrightarrow n \geqslant 8912$.

- Wiemy, że błąd przybliżenia w (3) nie przekracza $2 \cdot \frac{p^2+(1-p)^2}{2\sqrt{p(1-p)}} \frac{1}{\sqrt{n}}$, co dla $n_1 = 8912$ wynosi $\frac{0.58}{\sqrt{0.21}} \cdot \frac{1}{\sqrt{8912}} \approx 0.014$

- Wynika stąd, że dla $n_1 = 8912$, szukane prawdopodobieństwo $L_{n_1} \in (0.96 - 0.014; 0.96 + 0.014)$. Jak widać, istnieje możliwość, że L_{n_1} jest mniejsze od 0.96, co byłoby sprzeczne z poleceniem. Spróbujmy zatem, bazując na uzyskanej informacji, znaleźć takie n_2, aby błąd szacowania nie wpływał na poprawność rozwiązania. W tym celu w równaniu (4) zastąpmy 0.96 największą możliwą wartością L_{n_1}, czyli 0.974 i zastosujmy naszą metodę raz jeszcze. Otrzymujemy

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}\right) - 1 > 0.974$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}}\right) > 0.987$$

- Korzystając ponownie z tablic rozkładu normalnego zapisujemy

$$\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{21}} > 2.23$$
$$\Updownarrow$$
$$n > (2.23)^2 \cdot 100 \cdot 21 \approx 10443.09,$$

co w ostateczności daje nam

$$n \geqslant n_2 = 10444$$

- Dla $n_2 = 10444$ błąd przybliżenia nie przekracza $2 \cdot \frac{p^2+(1-p)^2}{2\sqrt{p(1-p)}} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{0.58}{\sqrt{0.21}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10444}} \approx 0.012$

- Dla $n_2 = 10444$ szukane prawdopodobieństwo $L_{n_2} \in (0.974 - 0.012; 0.974 + 0.012)$, zatem nawet w najgorszym przypadku spełnione są założenia zadania.

- Na koniec spróbujmy porównać rezultat naszych obliczeń z wynikiem numerycznym

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0.01\right) = P\left(-0.01 < \frac{S_n}{n} - p < 0.01\right) = P\left(\overbrace{(0.7 - 0.01) \cdot n}^{x_2(n)} < S_n < \overbrace{(0.7 + 0.01)}^{x_1(n)} \cdot n\right)$$

- Wynik dokładny otrzymany w *Matlabie* metodą `binocdf`$(x_1(n), n, p)$-`binocdf`$(x_2(n), n, p)$ dla $n = 10444$ i $p = 0.7$, to 0.9743. Dla $n = 8912$ otrzymujemy 0.9603, zatem w istocie już pierwsze szacowanie n dało poprawny wynik.