Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Lista 8. Rozwiązanie zadania 8.2 - dodatkowy podpunkt (f)

Opracowanie: Karolina Krzyszkiewicz

Zadanie **8.2**

(f) Na Politechnice Wrocławskiej są dwie stołówki, po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 studentów będzie chciało zjeść obiad, a wyboru stołówki dokonują losowo – powiedzmy rzucając symetryczną monetą.

(a) Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc?

(b) Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0.001?

Rozwiązanie:

Model: schemat Bernoulliego, sukces: wybór stołówki nr 1, $p = \frac{1}{2}$,
$n = 200$ - ilość studentów korzystających dziennie z obu stołówek (liczba prób).
Niech S_n oznacza liczbę sukcesów w n próbach.

Ad. (a)

- Miejsc w jednej ze stołówek zabraknie wtedy, gdy stołówkę nr 1 wybierze więcej niż 120 studentów lub gdy stołówkę nr 2 wybierze więcej niż 120 osób (czyli gdy stołówkę nr 1 wybierze mniej niż $200 - 120 = 80$ studentów).
  Zatem miejsc zabraknie $\Leftrightarrow S_n < 80$ lub $S_n > 120$, gdzie $n = 200$.

- n jest wystarczająco duże, więc możemy zastosować twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a.
  Otrzymujemy:
  $P(\text{zabraknie miejsc}) = P(S_n < 80) + P(S_n > 120) \approx \Phi\left(\frac{80-0.5-200\cdot 0.5}{\sqrt{200\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{120+0.5-200\cdot 0.5}{\sqrt{200\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right) =$
  $= \Phi(-2.05\sqrt{2}) + \ 1 - \Phi(2.05\sqrt{2}) = 2(1 - \Phi(2.05\sqrt{2})) \approx 2(1 - \Phi(2.90)) =$
  $= 2(1 - 0.9981) = 0.0038$ z tablic standardowego rozkładu normalnego.

- Błąd przybliżenia nie przekracza: $\frac{p^2+(1-p)^2}{2\sqrt{np(1-p)}} \approx 0.0354$

- (Wynik na podstawie wzorów dokładnych otrzymany w *Matlabie* komendą
  `binocdf(80-1,200,0.5)+1-binocdf(120,200,0.5)` to 0.0036.)

Ad. (b)

- Niech teraz $t \geqslant 100, t \in \mathbb{N}$, oznacza liczbę miejsc w stołówce nr 1 (i nr 2). Miejsc w jednej ze stołówek zabraknie wtedy, gdy stołówkę nr 1 wybierze więcej niż t studentów lub mniej niż $200 - t$ studentów. Zatem miejsc zabraknie $\Leftrightarrow S_n < n - t$ lub $S_n > t$, gdzie $n = 200$. Szukamy takiego $t \geqslant 100$, żeby $P(S_n > t) + P(S_n < n - t) < 0.001$ dla $n = 200$. Oczywiście uzyskamy to dla dowolnego $t \geqslant n = 200$. Ale interesuje nas jak najmniejsze t spełniające podany warunek.

- Z twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a otrzymujemy:
  $P(S_n > t) + P(S_n < n-t) \approx 1 - \Phi\left(\frac{t+0.5-200\cdot 0.5}{\sqrt{200\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right) + \Phi\left(\frac{200-0.5-t-200\cdot 0.5}{\sqrt{200\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right) =$
  $= 1 - \Phi\left(\left(\frac{t-99.5)\sqrt{2}}{10}\right) + \Phi\left(\frac{(99.5-t)}{10}\right) = 2\Phi\left(\frac{(99.5-t)\sqrt{2}}{10}\right).$

- Znajdźmy takie $t \geqslant 100, t \in \mathbb{N}$, że $2\Phi\left(\frac{(99.5-t)\sqrt{2}}{10}\right) < 0.001$

- Dla $t \in \mathbb{N}$:
  $2\Phi\left(\frac{(99.5-t)\sqrt{2}}{10}\right) < 0.001 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{(99.5-t)\sqrt{2}}{10}\right) > 0.9995 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{(t-99.5)\sqrt{2}}{10}\right) > 0.9995 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{(t-99.5)\sqrt{2}}{10}\right) > \Phi(3.32) \Leftrightarrow \frac{(t-99.5)\sqrt{2}}{10} > 3.32 \Leftrightarrow t - 99.5 > 3.32 \cdot \sqrt{50} \Leftrightarrow t > 122.98 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow t \geqslant 123.$

- Błąd przybliżenia nie przekracza: $2 \cdot \frac{p^2+(1-p)^2}{2\sqrt{np(1-p)}} \approx 0.0708$, więc jeszcze nie wiemy, czy istotnie dla $t = 123$ otrzymamy $P(S_{200} > t) + P(S_{200} < 200 - t) < 0.001$. Możemy to jednak sprawdzić obliczając to prawdopodobieństwo w *Matlabie* na podstawie wzorów dokładnych.

- Wynik otrzymany w komendą `binocdf(200-123-1,200,0.5)+1-binocdf(123,200,0.5)` to ≈ 0.000845. (Dla porównania dla $t = 122$ otrzymujemy ≈ 0.0014, więc $t = 122$ nie jest wystarczające.)

- **Wniosek:** Wystarczy przygotować po 123 miejsca w każdej restauracji.