Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - Dungeons & Dragons

Opracowanie: Tomasz Weron

1 Wprowadzenie

1.1

Fabularna gra fantasy "Dungeons & Dragons", w skrócie D&D, oryginalnie została stworzona przez Gary'ego Gygaxa oraz Dave'a Arnesona, a po raz pierwszy opublikowana w roku 1974 [2]. Jest uznawana za prekursora współczesnych gier RPG (ang. *role-playing game*). Stała się również prawdopodobnie najpopularniejszą grą tego rodzaju. Dla osoby, w której kręgu zainteresowań nie znajdują się podobne rozrywki, niektóre terminy mogą być niejasne. Zatem słowem wyjaśnienia, gra fabularna, czy też gra RPG, to zabawa towarzyska, choć nie są mi obce przypadki samotnej gry. Gracze wcielają się w bohaterów, niczym aktorzy odgrywają swoje postacie. Jedna z osób, najczęściej zwana Mistrzem Gry, w przypadku D&D Mistrzem Podziemi, staje się narratorem ich powieści. Tworzy otaczający bohaterów świat, ubiera go w szczegóły, może tchnąć weń życie. Odgrywa też wszystkie postacie, niebędące bohaterami graczy. To od niego zależy, w głównej mierze, przebieg rozgrywki, ograniczonej jedynie jego pomysłami oraz wyobraźnią graczy. Termin fantasy odnosi się natomiast do klimatu panującego w świecie gry. D&D jest z definicji grą fantasy, ale nie wszystkie RPG muszą takie być.

1.2

Do grania w RPG potrzebna jest przede wszystkim wyobraźnia, stąd też ich alternatywna nazwa gry wyobraźni. Jednak w przypadku D&D to nie wszystko. Stosuje się tu także książki, zawierające zasady gry, opisujące mechanikę, będące swoistą umową pomiędzy Mistrzem a graczami. W użyciu są również kości, zwalniające Mistrza z obowiązku decydowania o wszystkich zdarzeniach, wprowadzające jednocześnie więcej adrenaliny do gry. Prócz przyspieszonego bicia serca, wraz z kośćmi pojawia się matematyka.

1.3

Mechanika w D&D jest wyjątkowo rozbudowana, wobec czego streszczenie jej staje się niemożliwe. Nie to jest też moim celem. W tym dokumencie zajmę się jedynie kilkoma aspektami gry. Przedstawię w ich przypadku jak dokonywać optymalnych wyborów. Mój poradnik będzie dotyczył zasad zawartych w "Podręczniku Gracza" [1]. Jak w każdej grze, i tu chodzi o dobrą zabawę, a wszyscy wiemy, że najlepiej się bawimy, gdy wygrywamy.

2 Walka

2.1

Jednym z ważniejszych elementów gry jest walka. Nawet ten, zdawałoby się pojedynczy dział, jest bardzo rozbudowany. Omówię zatem jedynie jej podstawową i najbardziej klasyczną część, to jest fizyczną walkę wręcz.

Rysunek 1: Przedstawienie kości używanych w grze. Są to kolejno od lewej: czterościenna (k4), sześciościenna (k6), ośmiościenna (k8), dziesięciościenna (k10), dwunastościenna (k12) oraz dwudziestościenna (k20).

2.2

Jak wspomniałem powyżej, w grze wykorzystuje się rozmaite kości. W tym miejscu będzie nas interesowała jedynie, chyba najbardziej symboliczna dla D&D, dwudziestościenna kość symetryczna (k20) (patrz Rysunek 1). Stosowana jest bowiem do testów ataku, czyli prób trafienia przeciwnika bronią. W tym celu gracz wykonuje rzut k20. Do wyniku dodawane są rozmaite modyfikatory, jak modyfikator z siły postaci, czy bazowa premia do ataku, nad którymi nie zamierzam się rozwodzić. Jeśli wynik będzie równy lub większy niż wartość Klasy Pancerza (KP) przeciwnika, gracz, a właściwie jego bohater, uzyska trafienie. Klasa Pancerza jest jedną z wartości opisujących daną postać. Dla uproszczenia zajmę się jedynie satysfakcjonującym nas wynikiem na kości:

$$t + P_a \geqslant K_p \Leftrightarrow t \geqslant K_p - P_a \tag{1}$$

gdzie P_a oznaczę premię atakującego, K_p Klasę Pancerza przeciwnika, a t satysfakcjonujący wynik kości. Zapiszę również minimalny satysfakcjonujący nas wynik:

$$t_{min} = K_p - P_a, \forall_t \; t \geqslant t_{min}. \tag{2}$$

Zatem dla t_{min}, gdzie $t_{min} \in [1, 20]$, ponieważ rozważamy kość dwudziestościenną, satysfakcjonuje nas $20 - t_{min} + 1$ różnych wyników spośród 20. Zatem prawdopodobieństwo trafienia dla zadanego t_{min} wynosi:

$$\frac{20 - t_{min} + 1}{20}. \tag{3}$$

Powyższą zależność (3) można opisać funkcją, która każdej minimalnej wartości wymaganej do trafienia przyporządkuje prawdopodobieństwo trafienia:

$$p_1(t_{min}) = \frac{20 - t_{min} + 1}{20} = \frac{21 - t_{min}}{20} \quad \text{dla} \quad t_{min} \in [1, 20]. \tag{4}$$

2.3

Walka w D&D toczy się w tak zwanych rundach. Normalnie każda postać ma prawo do jednego testu ataku w rundzie, jednak istnieje szereg specjalnych zdolności, umożliwiających zwiększenie liczby ataków kosztem ich celności. I tak na przykład, grad ciosów, zdolność klasowa mnicha, czy walka dwiema broniami, po jednej w każdej ręce, pozwala na wykonanie jednego dodatkowego ataku w rundzie, ale z karą -2 do wszystkich testów ataku w danej rundzie. W takim przypadku minimalny satysfakcjonujący nas wynik rzutu kością k20 wzrasta o 2, lecz mamy dwie próby, by trafić. Wyprowadzę teraz analogiczną do powyższej (4) funkcję. Interesuje mnie uzyskanie przynajmniej jednego trafienia w dwóch próbach. Tym razem prawdopodobieństwo trafienia wynosi:

$$\frac{20-(t_{min}+2)+1}{20} = \frac{19-t_{min}}{20} \tag{5}$$

ponieważ przez karę -2 minimalny satysfakcjonujący wynik jest o 2 większy. Wzór zachodzi dla $t_{min} \in [1, 18]$, albowiem dowolny wynik t na kości k20, w tym minimalny $t_{min} + 2 \leqslant 20$. Dla $t_{min} \in [19, 20]$ prawdopodobieństwo trafienia wynosi 0, bo niemożliwym jest uzyskanie wyniku większego od 20. Zatem prawdopodobieństwo chybienia dla $t_{min} \in [1, 18]$ wynosi:

$$1 - \frac{19-t_{min}}{20} = \frac{t_{min}+1}{20} \tag{6}$$

Zdarzenie, kiedy uzyskujemy przynajmniej jedno trafienie w dwóch próbach, jest przeciwne do zdarzenia, gdy dwukrotnie chybiamy. Przy wykorzystaniu prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego, prawdopodobieństwo uzyskania przynajmniej jednego trafienia wyraża się funkcją:

$$p_2(t_{min}) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{t_{min}+1}{20}\right)^2 & \text{dla} \quad t_{min} \in [1, 18] \\ 0 \quad \text{dla} \quad t_{min} \in [19, 20]. \end{cases} \tag{7}$$

2.4

Porównanie wykresów obu funkcji (4) i (7) zostało przedstawione na Rysunku 2. Jak łatwo dostrzec, w znaczącej większości przypadków opłacalnym jest skorzystanie z możliwości wykonania dodatkowego ataku.

3 Obrażenia

3.1

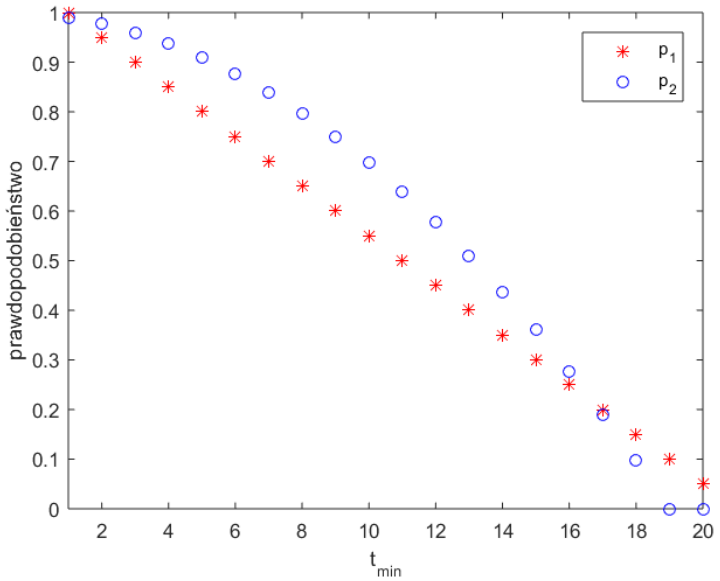
Powyżej zająłem się jedynie szansą pojedynczego trafienia. Niestety niezwykle rzadko znaczenie ma wyłącznie trafianie. W klasycznej walce wręcz liczą się przede wszystkim zadawane obrażenia.

3.2

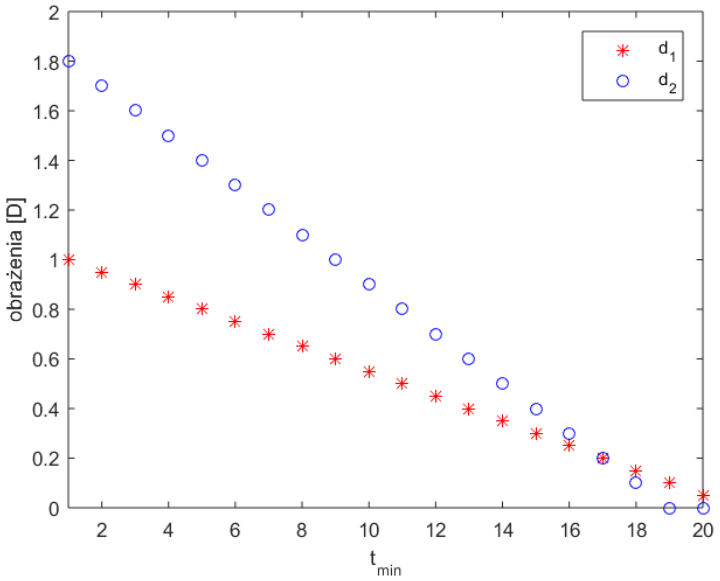
Obrażenia zadawane są przeciwnikowi po uzyskaniu trafienia. Obniżają liczbę jego Punktów Wytrzymałości, zmniejszając jego zdolność do przetrwania, w radykalnych przypadkach doprowadzając do śmierci.

3.3

Dla uproszczenia przyjmę, że po każdym trafieniu zadawana jest jakaś liczba obrażeń D. Mogę teraz zmodyfikować poprzednie funkcje (4), (7) tak, by ich wartościami były średnie zadawane obrażenia.



Rysunek 2: Porównanie prawdopodobieństw trafienia w jednej próbie (4) oraz przynajmniej jednego trafienia w dwóch próbach z karą -2 (7).



Rysunek 3: Porównanie zadawanych obrażeń w przypadku jednego ataku (8) oraz dwóch ataków z karą -2 (10).

Przy pojedynczym ataku średnie obrażenia otrzymujemy z funkcji:

$$d_1(t_{min}) = D\frac{21 - t_{min}}{20} \quad \text{dla} \quad t_{min} \in [1, 20]. \tag{8}$$

W przypadku dwóch ataków obrażenia możemy zadać na 3 sposoby: trafić i zadać obrażenia, a potem chybić lub chybić, a potem trafić i zadać obrażenia, albo też dwukrotnie trafić i zadać podwójne obrażenia. Zatem średnie obrażenia dla $t_{min} \in [1, 18]$ wynoszą:

$$\begin{aligned} d_2(t_{min}) &= D\left(\frac{19 - t_{min}}{20}\right)\left(\frac{t_{min} + 1}{20}\right) + D\left(\frac{t_{min} + 1}{20}\right)\left(\frac{19 - t_{min}}{20}\right) \\ &\quad +2D\left(\frac{19 - t_{min}}{20}\right)\left(\frac{19 - t_{min}}{20}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Dla $t_{min} \in [19, 20]$ zadane obrażenia zawsze wyniosą 0 (4). Upraszczając powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$d_2(t_{min}) = \begin{cases} 2D\left(\frac{19-t_{min}}{20}\right)\left(\frac{t_{min}+1}{20}\right) + 2D\left(\frac{19-t_{min}}{20}\right)^2 & dla \quad t_{min} \in [1, 18] \\ 0 \quad dla \quad t_{min} \in [19, 20]. \end{cases} \tag{10}$$

3.4

Porównanie wykresów obu funkcji (8) i (10) zostało przedstawione na Rysunku 3. Także w przypadku obrażeń dwukrotny atak jest korzystny w większości przypadków.

Literatura

[1] Cook, M., Tweet, J., and Williams, S. *Player's Handbook*, 3rd ed. Wizards of the Coast, 2000.

[2] Gygax, G., and Arneson, D. *Dungeons and Dragons*, 1st ed. TSR, Inc., 1974.