Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - klucze

Opracowanie: Arleta Maćkała, Paula Poczynek, Maria Wita

Zadanie:

Włamywacz ma n kluczy, z których dokładnie jeden pasuje do zamka. Wybiera on klucze losowo.

(a) Oblicz średnią liczbę prób potrzebnych do otwarcia drzwi, jeżeli włamywacz nie pamięta, które klucze już były próbowane.

(b) Wylicz tę średnią dla przypadku, gdy włamywacz odkłada klucze, które już próbował. Porównaj z wynikiem dla przypadku (a).

Rozwiązanie:

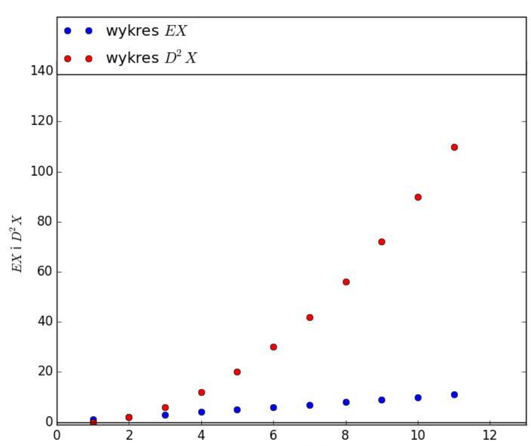
(a)

- Gdy włamywacz nie pamięta, które klucze były już próbowane, każda próba otwarcia drzwi odbywa się w takich samych warunkach i niezależnie od innych prób. Dlatego w tym przypadku możemy zastosować jako model schemat Bernoulliego.
- Model: Schemat Bernoulliego, sukces - wybranie dobrego klucza, prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = \frac{1}{n}$.
- Niech X oznacza liczbę prób potrzebnych do otwarcia drzwi. Jest to czas oczekiwania na pierwszy sukces.
- Zauważamy, że X ma rozkład geometryczny z parametrem $p = \frac{1}{n}$, czyli $X \sim \mathcal{G}eo(p = \frac{1}{n})$.
- Zatem wiemy, że średnia liczba prób potrzebnych do otwarcia drzwi wynosi:

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{p} = n.$$

- Wariancja będzie równa:

$$\mathrm{D}^2X = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n(n-1).$$



Rysunek 1: Wykres parametrów liczby prób potrzebnych do otwarcia drzwi w zależności od liczby kluczy (wariant (a))

(b)

- Rozważmy teraz przypadek, gdy włamywacz odkłada klucze, które już próbował.
- Niech Y oznacza liczbę prób potrzebną do otwarcia drzwi.
- Y przyjmuje wartości $i = 1, 2, \ldots, n$
- Aby obliczyć prawdopodobieństwo $P(Y = i)$, znajdźmy przestrzeń probabilistyczną modelującą badaną sytuację.

Mamy:
$\Omega = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, gdzie k_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, to różne klucze spośród n możliwych$\}$
$\mathcal{F} = 2^\Omega$, P - prawdopodobieństwo klasyczne
Wtedy dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\{Y = i\} = \{(k_1, \ldots, k_n) \in \Omega : k_i \text{ to klucz właściwy}\}$$

oraz

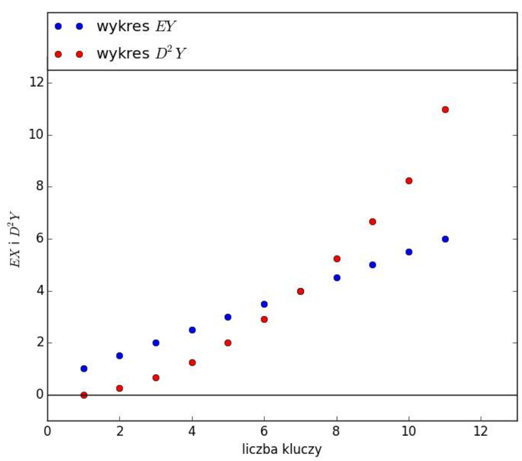
$$P(Y = i) = \frac{\#\{Y = i\}}{\#\Omega} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

- Otrzymaliśmy zatem, że Y ma rozkład dyskretny jednostajny, czyli $X \sim \mathcal{DU}(1, n, n-1)$.
- Zatem wiemy, że średnia liczba prób potrzebnych do otwarcia drzwi wynosi:

$$\mathrm{E}Y = \frac{n+1}{2}.$$

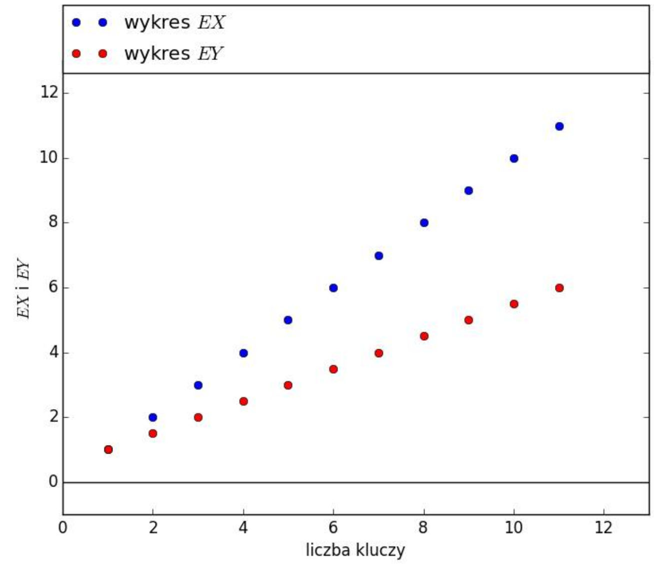
- Wariancja będzie równa:

$$\mathrm{D}^2Y = (1 + \frac{2}{n-1}) \cdot \frac{(n-1)^2}{12}.$$



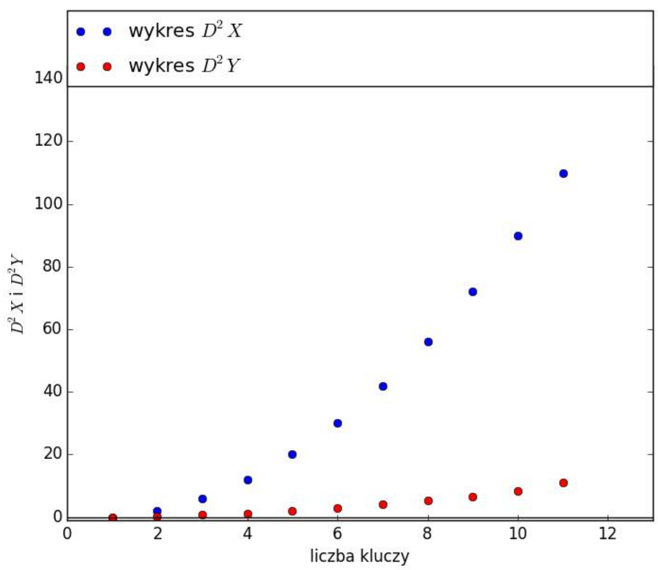
Rysunek 2: Wykres parametrów liczby prób potrzebnych do otwarcia drzwi w zależności od liczby kluczy (wariant (b))

Wnioski



Rysunek 3: Porównanie średniej liczby prób potrzebnych do otwarcia drzwi w zależności od liczby kluczy dla wariantów (a) i (b)

Zauważamy, że $\mathrm{E}X \geqslant \mathrm{E}Y$. Czym więcej prób, tym większa różnica między $\mathrm{E}X$ a $\mathrm{E}Y$. Łatwo możemy stwierdzić, że próbując włamać się do budynku o wiele lepiej jest pamiętać, których kluczy już używaliśmy, powinno to przyspieszyć proces otwierania zamka.



Rysunek 4: Porównanie wariancji liczby prób potrzebnych do otwarcia drzwi w zależności od liczby kluczy dla wariantów (a) i (b)

Widzimy, że dla zmiennej losowej X rozproszenie danych jest większe niż dla zmiennej losowej Y, $\mathrm{D}^2X \geqslant \mathrm{D}^2Y$. Dla małej ilości prób różnica jest niewielka, a potem szybko rośnie. Czym więcej prób, tym różnica ta jest większa.