Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - Paradoks kawalera de Mere

Opracowanie: Paulina Rygiel

Trochę historii na wstępie

Antoine Gombaud, znany jako Chevalier de Méré (1607-1684) był francuskim pisarzem. Do jego twórczości zaliczają się m.in. eseje *L'honnête homme* (dosł. Uczciwy człowiek) oraz *Discours de la vraie honnêteté* (dosł. Rozprawa o prawdziwej szczerości). Był myślicielem liberalnym, nie ufał zarówno monarchii dziedzicznej, jak i demokracji. Bardzo cenił sobie dyskusje, uważał bowiem, że są one najlepszym sposobem na rozwiązywanie problemów.

Antoine Gombaud jest jednak dużo bardziej znany za swój wkład w teorię prawdopodobieństwa, chociaż był matematykiem amatorem. Uprawiał hazard. Był zapalonym graczem w kości, dlatego często dokonywał różnych obserwacji związanych z rzutami.

Pierwsze jego spostrzeżenie dotyczyło następującej sytuacji: częściej wypada jedna szóstka przy czterech rzutach kostką, niż dwie szóstki przy dwudziestu czterech rzutach dwiema kostkami. Według Gombauda szanse te powinny byś takie same, niestety okazywało się, że przez swoje rozumowanie częściej przegrywał niż wygrywał. Ponieważ żył w latach, w których działali znani matematycy: Blaise Pascal (1623-1662) oraz Pierre de Fermat (1601-1665), napisał list do pierwszego z nich:

Panie Pascal, do diabła z tą matematyką, stawiałem na co najmniej jedną szóstkę w czterech rzutach i wygrywałem, a gdy zgodnie z waszą "regułą trzech" [1] *rzucałem dwoma kostkami 24 razy, to przegrywałem. Coś się tu nie zgadza, arytmetyka zawodzi. Doświadczenie pokazuje, że jest sprzeczna.*

List oburzonego Gombauda wzbudził zainteresowanie Pascala, który zaczął badać problem. Sam też napisał list do Fermata z zapytaniem, co on o tym sądzi. Gdy Pascal znał już odpowiedź na pytanie, otrzymał list Fermata z takim samym rozumowaniem jak jego własne, na które odpisał:

Cieszę się, że prawda jest taka sama w Tuluzie, jak w Paryżu.[2]

W ten właśnie sposób zaczęła kształtować się nowa dyscyplina - probabilistyka, a opisywany powyżej problem z jej dziedziny znany jest jako paradoks kawalera de Méré.

Jak zatem rozumował de Méré i dlaczego nie było to poprawne?

Antoine Gombaud uważał, że szansa wyrzucenia co najmniej jednej szóstki przy czterech rzutach wynosi: $4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. A ponieważ wykorzystywał jedynie regułę trzech, doszedł do wniosku, że jeśli dorzuci jedną kostkę i będzie stawiał na podwójną szóstkę przy rzucie dwiema kostkami, to szansa na wygraną będzie taka sama jak w poprzednim przypadku. Bowiem dodatkowa kostka to 6 razy więcej mozliwości, ale żeby szansa na wygraną nie zmniejszyła się, powinien rzucać 6 razy dłużej, czyli 24 razy. Wyliczył zatem takie samo prawdopodobieństwo: $24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. Rozumowanie to nie jest jednak poprawne.

[1] *Reguła pozwalająca obliczyć jedną z niewiadomych proporcji $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, gdy pozostałe trzy są dane. Bardzo rozpowszechniona w XVII wieku [encyklopedia.pwn.pl].*

[2] *To zdanie stało się swego czasu słynne i często cytowane, zwłaszcza po doświadczeniach prowadzących do wykrycia ciśnienia atmosferycznego i próżni, ale wypowiedziane było w liście Pascala do Fermata z dnia 29 lipca 1654 roku. Odpowiedzi Fermata niestety zaginęły [Wacław Zawadowski „Paradoks kawalera de Méré"].*

Jak jest naprawdę?

W dzisiejszych czasach znamy już zasady probabilistyki, dlatego na początku określimy dokładnie przestrzeń probabilistyczną modelującą naszą sytuację. Będziemy badać czterokrotny rzut kostką, zatem:

$\Omega_1 = \{(r_1, r_2, r_3, r_4)$, gdzie r_i to wynik i-tego rzutu symetryczną kostką$\}$

$\mathcal{F} = 2^{\Omega_1}$, P_1 - prawdopodobieństwo klasyczne (liczba możliwych wyników jest skończona)

A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej jednej szóstki przy czterech rzutach kostką

Wszystkich możliwych wyników jest $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$, zatem $\#\Omega_1 = 6^4$. Natomiast $\#A = 6^4 - 5^4$, ponieważ od liczby wszystkich możliwości należy odjąć ilość tych wyników, które nie dają ani jednej szóstki, a takich jest 5^4. Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi zatem:

$P_1(A) = \frac{\#A}{\#\Omega_1} = \frac{6^4-5^4}{6^4} = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \cong 0.5177.$

Zajmiemy się teraz druga sytuacją. Wykonujemy 24 rzuty dwoma kostkami.

$\Omega_2 = \{(r_1, r_2, ..., r_{24})$, gdzie $r_i = (k_1, k_2)$ dla $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$
(należy pamiętać, że kostki są rozróżnialne, tzn. wynik (3,4) to nie ten sam wynik co (4,3))

$\mathcal{F} = 2^{\Omega_2}$, P_2 - prawdopodobieństwo klasyczne

B - zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej raz dwóch szóstek przy 24 rzutach dwoma kostkami

Wszystkich możliwych wyników jest 36^{24}, ponieważ dla jednej kości mamy 6 możliwości, więc dla dwóch jest ich 36, a skoro mamy wykonać 24 rzuty, to $\#\Omega_2 = 36^{24}$.

$\#B = 36^{24} - 35^{24}$, gdyż podobnie jak wcześniej od liczby wszystkich możliwości odejmujemy te, w których ani razu nie wypadnie para szóstek.

Stąd $P_2(B) = \frac{\#B}{\#\Omega_2} = \frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}} = 1 - \frac{35^4}{36^4} \cong 0.4914.$

Widzimy zatem, że wyliczone prawdopodobieństwa zdarzeń A i B są różne, zajście zdarzenia A jest bardziej prawdopodobne niż zajście zdarzenia B, ale różnica jest niewielka. Dodajmy, że chociaż prawdopodobieństwa powyższe były wyznaczane w ramach różnych przestrzeni probabilistycznych, ich porównywanie ma sens w kontekście prawa wielkich liczb, którego pierwszą wersję sformułował Jakub Bernoulli. Z tego twierdzenia wynika, że dla ciągu doświadczeń Bernoulliego, w których sukcesem jest zajście pewnego zdarzenia A_0, częstość występowania sukcesów w długiej serii doświadczeń przybliża prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia A_0. Tym lepiej im dłuższa jest seria doświadczeń. Prawo to zachodzi dla badanych przez nas zdarzeń A i B, przy czym mała różnica pomiędzy wyliczonymi powyżej wartościami $P_1(A)$ i $P_2(B)$ powoduje, że różnicę pomiędzy częstościami występowania tych zdarzeń widać dopiero przy bardzo dużej liczbie powtórzeń odpowiednich serii rzutów. Dlatego tylko doświadczeni hazardziści, jak właśnie Antoine Gombaud, mogą zauważyć, że częściej dochodzi do zdarzenia A niż do zdarzenia B. Cała opisana tutaj sytuacja nazywana jest paradoksem, ponieważ szanse są inaczej rozłożone niż podpowiada intuicja.

Inny przykład

Aby zagłębić się jeszcze bardziej w paradoks kawalera de Méré, rozważmy następujące zadanie:

Rzucamy trzema kostkami do gry. Jaka jest szansa, że suma oczek wynosi 11? A jaka, że 12?

Przy rzucie trzema kostkami do gry sumę oczek równą 11 możemy uzyskać na 6 sposobów:

$1+4+6=11$, $1+5+5=11$, $2+3+6=11$, $2+4+5=11$, $3+3+5=11$, $3+4+4=11$.

Sumę oczek równą 12 również uzyskujemy na 6 sposobów:

$1+5+6=12$, $2+4+6=12$, $2+5+5=12$, $3+3+6=12$, $3+4+5=12$, $4+4+4=12$.

Wydaje się, że można stąd wywnioskować, że szansa na wyrzucenie sumy oczek równej 11 jest taka sama, jak szansa na wyrzucenie sumy oczek równej 12. Jest to jednakże błędne rozumowanie, chociaż nie każdy jest w stanie od razu to zauważyć.

Okazuje się, że rzucając kilkoma kostkami koniecznie należy je rozróżnić, czego nie zrobiliśmy powyżej. Prawidłowy model naszej sytuacji to:

$\Omega = \{(r_1, r_2, r_3)$, gdzie $r_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

$\mathcal{F} = 2^\Omega$, P-prawdopodobieństwo klasyczne

C-zdarzenie polegające na wyrzuceniu sumy oczek równej 11

D-zdarzenie polegające na wyrzuceniu sumy oczek równej 12

Ponieważ uwzględniamy kolejność, to wszystkich możliwych wyników jest $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$, zatem $\#\Omega = 216$.

Rezultatem rozróżniania kości, jest to, że następujące wyniki traktujemy jako różne: (1,5,6), (1,6,5), (5,1,6), (5,6,1), (6,1,5), (6,5,1). Widzimy zatem, że dla trzech różnych cyfr mamy $3! = 6$ różnych ustawień. W przypadku dwóch jednakowych i jednej innej cyfry możliwości są 3 np: (2,2,5),(2,5,2),(5,2,2). Gdyby wszystkie cyfry były jednakowe to możliwość ustawienia jest oczywiście tylko jedna.

Istnieją trzy zestawy różnych cyfr spośród {1,2,3,4,5,6} dających nam w sumie liczbę 11 oraz 3 zestawy dwóch jednakowych cyfr i jednej innej. Zatem $\#C = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 18 + 9 = 27$.

Jeśli chodzi o liczbę 12 sytuacja trochę się różni. Są trzy zestawy różnych cyfr, ale tylko 2 zestawy dwóch jednakowych i jednej innej. Ostatni zestaw składa się z trzech czwórek, zatem możliwość ustawienia jest tylko jedna. Stąd $\#D = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 = 18 + 6 + 1 = 25$.

Obliczając teraz prawdopodobieństwo obydwu zdarzeń otrzymujemy:
$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{27}{216} \cong 0.125$
$P(D) = \frac{\#D}{\#\Omega} = \frac{25}{216} \cong 0.116.$

Po raz kolejny różnica jest bardzo mała, wobec czego można pomyśleć, że nie ma ona znaczenia i nie będzie widoczna przy obserwacjach częstości występowania badanych zdarzeń. Okazuje się jednak, że przy dużej liczbie prób jest zauważalna. Moglibyśmy to sprawdzić rzucając trzema kostkami np. 10000 razy. Niestety zajęłoby nam to dużo czasu, musielibyśmy także zliczać te wyniki i na dodatek starać się nie pomylić. Współcześnie lepiej jest wobec tego wykorzystać komputer i symulować takie rzuty.

Zatem chcąc sprawdzić, czy w rzeczywistości częściej wypada suma oczek 11 niż 12, wykorzystałam napisany przeze mnie program w języku Python, symulujący rzuty trzema kostkami. Otrzymałam następujące wyniki:

Dla 100 prób:

1) Ilość otrzymania sumy 11 z 100 prób: 14
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{14}{100} = 0.14$
Ilość otrzymania sumy 12 z 100 prób: 16
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{16}{100} = 0.16$

Dla 1000 prób:

2) Ilość otrzymania sumy 11 z 1000 prób: 139
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{139}{1000} = 0.139$
Ilość otrzymania sumy 12 z 1000 prób: 104
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{104}{1000} = 0.104$
3) Ilość otrzymania sumy 11 z 1000 prób: 121
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{121}{1000} = 0.121$
Ilość otrzymania sumy 12 z 1000 prób: 109
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{109}{1000} = 0.109$
4) Ilość otrzymania sumy 11 z 1000 prób: 117
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{117}{1000} = 0.117$
Ilość otrzymania sumy 12 z 1000 prób: 123
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{123}{1000} = 0.123$
5) Ilość otrzymania sumy 11 z 1000 prób: 126
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{126}{1000} = 0.126$
Ilość otrzymania sumy 12 z 1000 prób: 102
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{102}{1000} = 0.102$

Dla 10000 prób:

6) Ilość otrzymania sumy 11 z 10000 prób: 1293
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{1293}{10000} = 0.1293$
Ilość otrzymania sumy 12 z 10000 prób: 1173
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{1173}{10000} = 0.1173$
7) Ilość otrzymania sumy 11 z 10000 prób: 1263
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{1263}{10000} = 0.1263$
Ilość otrzymania sumy 12 z 10000 prób: 1174
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{1174}{10000} = 0.1174$
8) Ilość otrzymania sumy 11 z 10000 prób: 1233
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{1233}{10000} = 0.1233$
Ilość otrzymania sumy 12 z 10000 prób: 1140
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{1140}{10000} = 0.1140$

Dla 500000 prób:

9) Ilość otrzymania sumy 11 z 500000 prób: 62477
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{62477}{500000} = 0.12495$
Ilość otrzymania sumy 12 z 500000 prób: 58034
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{58034}{500000} = 0.116068$

10) Ilość otrzymania sumy 11 z 500000 prób: 62671
częstość występowania sumy oczek równej 11: $\frac{62671}{500000} = 0.125342$
Ilość otrzymania sumy 12 z 500000 prób: 57524
częstość występowania sumy oczek równej 12: $\frac{57524}{500000} = 0.115048$

Na podstawie powyższego eksperymentu możemy stwierdzić, że rzeczywiście Antoine Gombaud mógł zaobserwować, że suma oczek równa 11 występuje częściej, niż suma oczek 12. W przypadku 1), gdzie liczba doświadczeń wynosiła 100, nie jesteśmy w stanie zauważyć, że któraś z sytuacji zdarza się częściej. Natomiast dla 1000 prób różnica zaczyna być widoczna, i im większa liczba doświadczeń, tym zjawisko to jest bardziej dostrzegalne. W przypadku 500000 powtórzeń różnica pomiędzy występowaniem sumy równej 11 i 12 sięga nawet 5147. Na uwagę zasługuje czwarty wynik, w którym 12 wypadła więcej razy, stąd jeśli ktoś nie zajmuje się grami w kości, a wykona jedynie pojedynczy eksperyment, może nie dojść do takiego samego wniosku, co Gombaud. Widać też, że im większa liczba prób, tym częstość występowania danej sumy oczek jest bliższa wyliczonej wcześniej wartości prawdopodobieństwa jej wystąpienia, co ilustruje działanie prawa wielkich liczb.

Podsumowanie

Paradoks kawalera de Méré związany jest z błędnym wyobrażeniami o losowości. Wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z rzutami kilkoma kośćmi, należy pamiętać o tym, aby je rozróżniać. Ważnym aspektem jest też dokładny opis przestrzeni probabilistycznej, który umożliwia poprawną analizę sytuacji. Przy takich działaniach mamy duże szanse na uniknięcie błędów w rozumowaniu. W probabilistyce nie należy ufać ludzkiej intuicji, bowiem wobec zdarzeń losowych często bywa zawodna. Stąd tak liczne paradoksy w probabilistyce.

Źródła:
1)en.wikipedia.org/wiki/Antoine_Gombaud
2)proofwiki.org/wiki/De_Méré's_Paradox
3)www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/rachunek_prawdopodobienstwa/2011/03/25/Paradoksy_rachunku_prawdopodobienstw
4)Wacław Zawadowski „Paradoks kawalera de Méré”