Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - Paradoks dnia urodzin

Opracowanie: Anna Markiewicz

Zadanie (paradoks dnia urodzin):
Ile musi być w grupie losowo wybranych osób, aby prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie z nich mają urodziny tego samego dnia w roku, było większe od 0.5? Zakładamy dla uproszczenia, że w populacji nie ma osób urodzonych 29 lutego, jak również rodzeństw bliźniaczych. Zakładamy też, że urodzenie się w każdy spośród 365 dni roku jest tak samo prawdopodobne.

Rozwiązanie:
Niech n oznacza liczbę osób w danej grupie, gdzie $n \leqslant 365$ (ponieważ dla $n > 365$ na pewno co najmniej dwie osoby mają urodziny tego samego dnia i zadanie staje się trywialne). Dni w roku również ponumerujmy od 1 do 365. Przestrzeń probabilistyczna ma postać:
$\Omega_n = \{(o_1, ..., o_n)$, gdzie $o_i \in \{1, ..., 365\}, i = 1, .., n$, z powtórzeniami$\}$
o_i-numer dnia urodzin i-tej osoby.
$\mathcal{F} = 2^\Omega$
P-prawdopodobieństwo klasyczne
W danej grupie osób mamy dwa możliwe wzajemnie wykluczające się, a zarazem dopełniające się zdarzenia:

- Przynajmniej dwie osoby mają urodziny w ten sam dzień.
- Każda osoba w grupie obchodzi urodziny w innym dniu.

Łatwiej jest obliczyć prawdopodobieństwo drugiego zdarzenia.
Oznaczamy:
A_n - zdarzenie, że przynajmniej dwie osoby mają urodziny w ten sam dzień.
A_n^c - zdarzenie, że każda osoba w grupie obchodzi urodziny w innym dniu.

$$A_n^c = \{(o_1, .., o_n) \in \Omega : o_i \text{ są różne dla różnych } i = 1, .., n\}$$

Szukamy takiego n, dla którego $P(A) > 0.5$ lub, równoważnie, $P(A^c) < 0.5$. Mamy

$$|A_n^c| = \prod_{k=0}^{n-1}(365 - k) = \frac{365!}{(365 - n)!}, \qquad |\Omega_n| = 365^n$$

$$P(A_n^c) = \frac{|A_n^c|}{|\Omega_n|} = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

Szukamy takiego n, $n \in \langle 0, 365 \rangle$, żeby:

$$a_n = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) < 0.5$$

Możemy poszukiwać najmniejszego n, które spełnia powyższy warunek, ponieważ
$\bigwedge_n a_{n+1} = a_n \cdot (1 - \frac{n}{365}) < a_n$, a stąd jeżeli $a_n < 0.5$ dla pewnego n, to także $\bigwedge_{n_2 > n} a_{n_2} < 0.5$.
Skorzystamy z przybliżenia $1 - x \approx e^{-x}$ dla małych x. Otrzymujemy:

$$a_n \approx e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{n-1}{365}} = e^{-\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{365}} = e^{-\frac{(n-1)n}{2\cdot 365}} < 0.5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(n-1)n}{2 \cdot 365} < \ln\frac{1}{2},\ n \leqslant 365$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n > 2 \cdot 365 \cdot \ln 2,\ n \leqslant 365$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2 \cdot 365 \cdot \ln 2 > 0,\ n \leqslant 365 \ \Leftrightarrow\ n \in \langle 23, 365 \rangle\,,$$

$$\text{bo } \Delta = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 365 \cdot \ln 2 \approx 2024.99$$

$$n_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} \approx 22.49,\ n_2 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} < 0.$$

Istotnie mamy $a_{22} \approx 0.5243$ i $a_{23} \approx 0.4927$. Zatem z powyższych rozważań wynika, że wystarczą 23 osoby, aby prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwie osoby z nich mają urodziny tego samego dnia w roku, było większe niż 0.5.

A jak wyglądają prawdopodobieństwa tego zdarzenia w przypadku większej liczby osób? Weźmy $n = 23, 30, 50$.

$$P(A_{23}) = 1 - P(A_{23}^c) = 1 - a_{23} = 0.5073$$

$$P(A_{30}) = 1 - P(A_{30}^c) = 1 - a_{30} = 0.7063$$

$$P(A_{50}) = 1 - P(A_{50}^c) = 1 - a_{50} = 0.9704$$

Jak widzimy, prawdopodobieństwo zdarzenia A_n szybko rośnie. W grupie 50 osobowej jest niewiele mniejsze od 1. Pozornie wydaje się to być mało możliwe, ale zakładając się z kimś o to, że dwie osoby z takiej grupy mają urodziny w ten sam dzień, mamy niemalże 100 procent szans na zwycięstwo.

Poniższy rysunek ilustruje nasze rozważania: