Rachunek Prawdopodobieństwa MAP1181

Wydział Matematyki, Matematyka Stosowana

Projekt - Problem 100 więźniów

Opracowanie: Wojciech Żuławiński

Zadanie:

Dyrektor więzienia dał 100 kolejno ponumerowanym więźniom ostatnią szansę na wyjście na wolność. Ich numery zostały losowo rozmieszczone w 100 szafkach ustawionych w pewnym zamkniętym pomieszczeniu. Zadaniem każdego z więźniów jest odnalezienie swojego numeru przy otwarciu nie więcej niż 50 szafek. Co więcej, więźniowie zostaną uwolnieni tylko wtedy, gdy **każdy** z nich znajdzie swój numer. Mogą ustalić swoją strategię przed wejściem pierwszego z nich do pokoju z szafkami, ale potem nie mogą się już kontaktować. Pytanie brzmi: jaką strategię powinni przyjąć, by maksymalnie zwiększyć swoją szansę na wyjście? Jakie będzie wówczas prawdopodobieństwo ich wygranej?

Rozwiązanie:

Na początku obliczmy prawdopodobieństwo wyjścia więźniów na wolność przy założeniu, że przy otwieraniu szafek nie kierują się oni żadną strategią i robią to zupełnie losowo. Skorzystamy ze schematu Bernoulliego, ale by móc to zrobić, musimy najpierw wyznaczyć prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu, czyli tego, że więzień przy otwarciu 50 ze 100 szafek zdoła znaleźć swój numer. Określmy przestrzeń probabilistyczną odpowiadającą tej sytuacji:

- $\Omega = \{\{n_1, \dots, n_{50}\},$ gdzie n_i to numery szafek wybranych przez więźnia, $n_i \in \{1, \dots, 100\}$ bez powtórzeń$\}$,
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,
- P – prawdopodobieństwo klasyczne,
- $A = \{\{n_1, \dots, n_{50}\} \in \Omega,$ wśród n_i właściwy numer$\}$.

Więzień wybiera 50 ze 100 szafek, dlatego $\#\Omega = \binom{100}{50}$. W kombinacji należącej do zbioru A znajduje się jedyna szafka, w której znajduje się szukany numer, oraz 49 dowolnie wybranych spośród pozostałych 99 szafek, stąd $\#A = \binom{1}{1}\binom{99}{49} = \binom{99}{49}$.

Korzystając z prawdopodobieństwa klasycznego, możemy obliczyć $P(A)$:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{99}{49}}{\binom{100}{50}} = \frac{99!}{49!\,50!} \cdot \frac{50!\,50!}{100!} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Znając prawdopodobieństwo sukcesu jednego więźnia, możemy skorzystać ze schematu Bernoulliego, by sprawdzić, jaka jest szansa, że sztuki tej dokona wszystkich stu i, w konsekwencji, wyjdą oni na wolność:

- Model: schemat Bernoulliego.
- Próba: wybór 50 spośród 100 szafek przez więźnia.
- Sukces: więzień znajduje swój numer, $p = \frac{1}{2}$, $n = 100$ więźniów.

Niech X oznacza liczbę sukcesów w n próbach. Wtedy $P(X=k)=\binom{100}{k}(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{100-k}$. Więźniowie wyjdą na wolność tylko wtedy, gdy każdy z nich znajdzie swój numer, czyli gdy $X=100$, a zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(X=100)=\binom{100}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{100-100}=\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx 0.0000000000000000000000000000008 =$$
$$= 8\cdot 10^{-31}.$$

Jak widać, przy losowym otwieraniu szafek szanse więźniów na wygraną są znikome. Okazuje się jednak, że istnieje strategia, która zwiększa to prawdopodobieństwo do ponad 30%! Sposób ten nie dość, że jest znacznie bardziej skuteczny od wybierania szafek losowo, to jeszcze jest bardzo prosty:

- Pierwszą szafką, jaką powinien otworzyć więzień, powinna być szafka z jego własnym numerem.
- Każdą kolejną szafką powinna być ta o numerze znalezionym w poprzedniej.

Na przykład: więzień z numerem 8 otwiera najpierw szafkę z numerem 8, znajduje tam numer 24, więc otwiera szafkę z numerem 24, i tak dalej. Na pierwszy rzut oka strategia ta nie różni się za bardzo od losowego otwierania, a jednak zwiększa prawdopodobieństwo sukcesu w niewyobrażalnym wręcz stopniu. Dlaczego?

Losowe rozmieszczenie liczb od 1 do 100 w szafkach jest niczym innym, jak permutacją tych liczb. W tym przypadku ważne dla nas jest, że każdą permutację można rozłożyć na cykle. Dla przykładu rozważmy następującą permutację:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

Zauważmy, że 1 przechodzi w 5, 5 przechodzi w 3, 3 przechodzi w 2, a 2 przechodzi w 1. Jest to jeden z cykli tej permutacji. Kolejny to $4\longrightarrow 7\longrightarrow 8\longrightarrow 4$, natomiast 6 przechodzi w samą siebie. Ostatecznie można zapisać tę permutację jako sumę rozłącznych cykli:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 1 & 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 4\end{pmatrix}=(1532)(478)(6)$$

Co to ma wspólnego z naszymi więźniami? Załóżmy, że jest ich 8, każdy z nich może otworzyć maksymalnie 4 szafki, a numery rozmieszczone są zgodnie z omawianą permutacją, to znaczy: w pierwszej szafce znajduje się numer 5, w drugiej 1, i tak dalej. Jeśli więźniowie przyjmą omawianą taktykę, to każdy z nich, otwierając kolejne szafki, będzie poruszał się po pewnym zamkniętym cyklu, na przykład:

- Więzień 1. znajdzie swój numer po otwarciu czterech szafek (najpierw otwiera szafkę 1, potem szafkę 5, potem szafkę 3 i w końcu w szafce 2 znajduje jedynkę). Analogicznie więźniowie o numerach 5, 3, 2.
- Więzień 4. po otwarciu trzech szafek (najpierw otwiera szafkę 4, potem szafkę 7 i w szafce 8 znajduje numer 4). Analogicznie więźniowie o numerach 7 i 8.
- Więzień 6. znajdzie swój numer już w pierwszej otwartej przez siebie szafce 6.

W tym konkretnym przypadku więźniowie wyjdą na wolność, ponieważ omawiana permutacja nie zawiera ani jednego cyklu o długości większej niż 4. Gdyby tak nie było, na przykład w przypadku poniższej permutacji:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} = (153247)(6)(8),$$

to przy stosowaniu tej strategii swój numer znaleźliby tylko więźniowie 6 i 8 (i to już w pierwszej otwartej szafce), natomiast reszta nie zmieściłaby się w zadanym limicie otwierania maksymalnie czterech szafek.

W przypadku 100 więźniów i 50 szafek, jakie każdy z nich może otworzyć, sytuacja wygląda analogicznie. Ważne jest założenie, że numery są rozmieszczone w szafkach przypadkowo, ponieważ widać, że w przeciwnym przypadku dyrektor zawsze mógłby zrobić to tak, by całkowicie uniemożliwić sukces więźniów stosujących tę strategię. Żeby dowiedzieć się, jakie jest prawdopodobieństwo wyjścia więźniów na wolność, trzeba obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że permutacja liczb od 1 do 100, z jaką spotkają się więźniowie, nie zawiera cyklu dłuższego niż 50. Określmy przestrzeń probabilistyczną modelującą tę sytuację:

- $\Omega = \{(n_1, n_2, ..., n_{100}),$ gdzie n_i to numer umieszczony w i-tej szafce$\}$,
  czyli jest to zbiór, którego elementami są permutacje liczb od 1 do 100,
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,
- P – prawdopodobieństwo klasyczne,
- A – zdarzenie losowe, że permutacja nie zawiera żadnego cyklu o długości większej niż 50,
- A^C – permutacja zawiera cykl o długości większej niż 50.

Permutacja liczb od 1 do 100 może zawierać maksymalnie jeden cykl o długości l, gdy $l = 51, 52, \ldots, 100$. Liczby, które znajdą się w tym cyklu, można wybrać na $\binom{100}{l}$ sposobów. Ustawić je można na $l!$ sposobów, ale trzeba pamiętać, że każdy n-elementowy cykl ma n opisów różniących się jedynie przesunięciem (przykładowo: $(abc) = (cab) = (bca)$ to jeden cykl zapisany na trzy sposoby, ponieważ w każdym przypadku $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$). Oznacza to, że cykl złożony z l wybranych liczb można skonstruować na $\frac{l!}{l} = (l-1)!$ sposobów.

Pozostałe liczby można ułożyć na $(100-l)!$ sposobów. Oznacza to, że permutacji liczb od 1 do 100 zawierających jeden cykl długości $l = 51, 52, \ldots, 100$ jest

$$\binom{100}{l}(l-1)!(100-l)! = \frac{100!}{l!(100-l)!}(l-1)!(100-l)! = \frac{100!}{l}.$$

Stąd możemy wyznaczyć moc zbioru A^C:

$$\#A^C = \frac{100!}{51} + \frac{100!}{52} + \ldots + \frac{100!}{100} = 100!\left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right).$$

Moc zbioru Ω jest równa liczbie wszystkich permutacji liczb od 1 do 100, czyli $\#\Omega = 100!$. Korzystając z prawdopodobieństwa klasycznego możemy zatem obliczyć $P(A^C)$:

$$P(A^C) = \frac{\#A^C}{\#\Omega} = \frac{100!\left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right)}{100!} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}.$$

Korzystając z tego, że $P(A) = 1 - P(A^C)$, możemy już wyliczyć szukane prawdopodobieństwo:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}\right) \approx 0.31183.$$

Oznacza to, że więźniowie w przypadku zastosowania zaproponowanej strategii mają około 31% szansy na uwolnienie.

Można postawić pytanie – jak skuteczna byłaby ta taktyka, gdyby więźniów było więcej? Innymi słowy – ile wynosiłoby $P(A)$ dla liczby więźniów dążącej do nieskończoności? Załóżmy, że jest $2n$ więźniów i każdy musi znaleźć swój numer otwierając maksymalnie n szafek. Analogicznie można pokazać, że

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

Wykorzystując pojęcie sumy harmonicznej $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ można zapisać powyższe równanie jako

$$P(A) = 1 - (H_{2n} - H_n) = 1 - (H_{2n} - \ln 2n) + (H_n - \ln n) - \ln 2.$$

Powyższy zapis pozwala wykorzystać stałą Eulera-Mascheroniego $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)$ i przekształcić to równanie do postaci

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = 1 - \gamma + \gamma - \ln 2 \approx 0.30685.$$

Warto przypomnieć, że prawdopodobieństwo wyjścia na wolność $2n$ więźniów wybierających szafki zupełnie losowo wynosi $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ i dla $n \to \infty$ bardzo szybko zbiega do zera.

Źródła:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/100_prisoners_problem
2. http://datagenetics.com/blog/december42014/index.html